STATYSTYKA

Materiały do ćwiczeń

Teoria mnogości

Kombinatoryka

Rachunek prawdopodobieństwa

Przygotował:

Dr inż. Wojciech Artichowicz

Katedra Hydrotechniki PG

Lato 2014/15

ZBIORY I ZDARZENIA

Zadanie 1.

Dane są następujące zbiory:

$$A_1=\{a,b,c\},\ A_2=\{b,c,d,e,f\},\ A_3=\{b,f\},\ A_4=\{a,b,d\}.$$

Znajdź $A=\bigcup_i A_i$ oraz $B=\bigcap_i A_i$.

Rozwiązanie:

$$A= A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\{a,b,c,d,e,f\}$$

$$B= A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{b\}$$

Zadanie 2. (Źródło: [3])

W stacji znajduje się 6 pomp. Eksperyment polega na obserwacji liczby pracujących jednocześnie pomp. Określono następujące zdarzenia $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{1,3,5\}$. Znajdź: A', $A\cup B$, $A\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $(A\cap C)'$. Nazwij wszystkie zdarzenia.

Rozwiązanie:

A – Nie pracuje żadna pompa, lub pracuje od jednej do czterech pomp w tym samym momencie.

B – pracuje od trzech do sześciu pomp jednocześnie.

C – pracuje jedna, trzy lub pięć pomp.

Żeby określić zdarzenie A', konieczne jest znalezienie przestrzeni zdarzeń elementarnych. Tu $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Tak więc

$A'=\Omega - A = \{5,6\}$ – pracuje pięć lub sześć pomp,

$A\cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ – pracuje dowolna liczba pomp,

$A\cup C = \{0,1,2,3,4,5\}$ – pracuje od zera do pięciu pomp,

$A\cap B = \{3,4\}$ – pracują trzy lub cztery pompy,

$A\cap C = \{1,3\}$ – pracuje jedna lub trzy pompy,

$(A\cap C)' = \Omega - A\cap C = \{0,2,4,5,6\}$ – nie pracuje żadna pompa, lub pracują dwie, cztery, pięć lub sześć pomp.

Zadanie 3. (Źródło: [3])

Załóżmy, że A i B są dwoma podzbiorami przestrzeni zdarzeń, oraz że $A'=\{a,b,c\}$, $B'=\{b,c,d\}$. Znajdź $(A\cup B)'$.

Rozwiązanie:

Zadanie można rozwiązać nie znając zbioru Ω, jeśli wykorzysta się jedno z praw de Morgana.

$$(A\cup B)' = A'\cap B' = \{b,c\}$$

Zadanie 4. (Źródło: [12])

Z partii towaru zawierającej sztuki zarówno sprawne jak i wadliwe wybrano trzy sztuki. Określmy zdarzenia:

A – w trzech wybranych sztukach dokładnie jedna jest sprawna,

B – w trzech wybranych sztukach jest co najwyżej jedna sprawna,

C – w trzech wybranych sztukach co najmniej jedna jest sprawna.

Wyjaśnij znaczenie zdarzeń: A', B', C', $A\cup B$, $A\cap B$, $B\cup C$, $B\cap C$, $B'\cap C'$.

Rozwiązanie:

A' – w trzech wybranych sztukach żadna, dwie lub trzy są sprawne / żadna lub więcej niż jedna jest sprawna,

B' – w trzech wybranych sztukach dwie lub trzy sztuki są sprawne / więcej niż jedna sprawna sztuka w trzech wybranych,

C' – żadna z trzech wybranych sztuk nie jest sprawna,

$A\cup B$ – w trzech wybranych sztukach jest co najwyżej jedna jest sprawna,

$A\cap B$ – w trzech wybranych sztukach dokładnie jedna jest sprawna,

$B\cup C$ – w trzech wybranych sztukach żadna, jedna, dwie lub trzy są sprawne,

$B\cap C$ – w trzech wybranych sztukach dokładnie jedna jest sprawna,

$B'\cap C'=\emptyset$.

Zadanie 5. (Źródło: [12])

Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6: $A=6\mathbb{N}=\{6, 12, 18, ...\}$, B – podzielnych przez dwa: $B=2\mathbb{N}=\{2, 4, 6, ...\}$, C – podzielnych przez 5: $C=5\mathbb{N}=\{5, 10, 15, ...\}$. Znajdź zbiory: $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, A-B, A-C, $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$.

Rozwiązanie:

$A\cup B = 6\mathbb{N}\cup 2\mathbb{N} = B = 2\mathbb{N} =\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$,

$A \cup C = 6\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} = \{5, 6, 10, 12, 15, 18, ...\}$,

$B \cup C = 2\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, ...\}$,

$A \cup C = 6\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N} = A = 6\mathbb{N} = \{6, 12, 18, 24, ...\}$,

$A \cap C = 6\mathbb{N} \cap 5\mathbb{N} = 30\mathbb{N} = \{30, 60, 90, ...\}$,

$B \cap C = 2\mathbb{N} \cap 5\mathbb{N} = 10\mathbb{N} = \{10, 20, 30, \}$

$A - B = 6\mathbb{N} - 2\mathbb{N} = \emptyset$

$A - C = 6\mathbb{N} - 5\mathbb{N} = \{6, 12, 18, \} - \{5, 10, 15, ...\} = 6\mathbb{N} - 30\mathbb{N} = \{6, 12, 18, ...\} - \{30, 60, 90, ...\}$

$A \cup B \cup \mathrm{C} = 6\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 ...\}$

$A \cap B \cap C = 6\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} = 30\mathbb{N} = \{30, 60, 90, 120, ...\}$

Zadanie 6. (Źródło: [16])

Dane są trzy zbiory liczb: $A=\{2, 4, ..., 20\}$, $B=\{3, 6, 9, ..., 18\}$, $C=\{4, 8, ..., 20\}$ zawarte w zbiorze $\Omega=\{1, 2, 3, ..., 20\}$. Wypisz wszystkie elementy należące do zbiorów: Znajdź zbiory $A \cap B \cap C$, $(A \cap B') \cap C$, $(A \cap B) - C$, $A' \cap B' \cap C$.

Rozwiązanie:

$$A \cap B \cap C = \{12\},$$

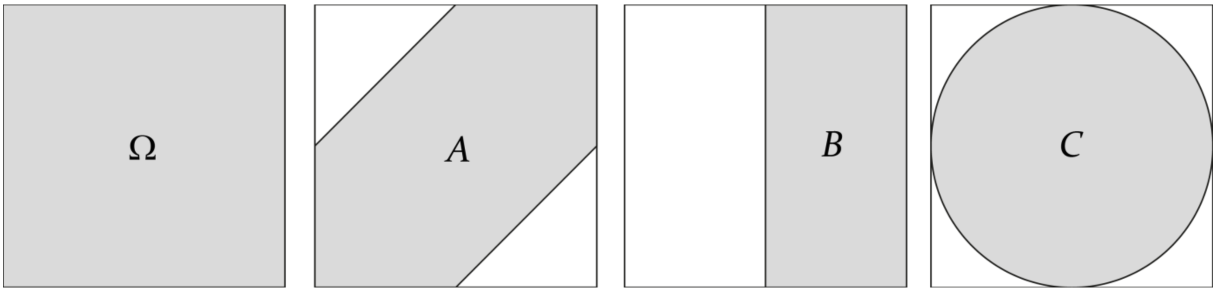
$$(A \cap B') \cap C = \{4, 8, 16, 20\},$$

$$(A \cap B) - C = \{6, 18\},$$

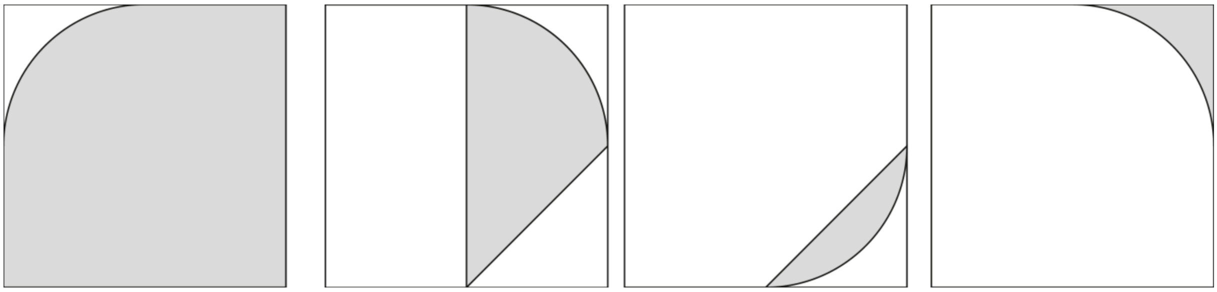
$$A' \cap B' \cap C = \emptyset.$$

Zadanie 7. (Źródło: [16])

Dane są zbiory Ω, A, B, C określone jak na rysunku (kolor szary). Narysuj zbiory: $A \cup B \cup \mathrm{C}$, $A \cap B \cap C$, $A' \cap B \cap C$, $A \cap C' \cap B$.

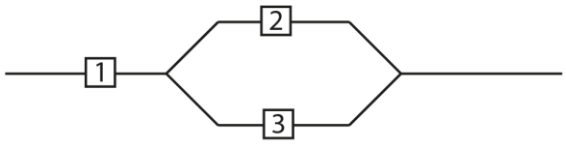


Rozwiązanie:



Zadanie 8. (Źródło: [3])

W pewnym układzie elektronicznym elementy są połączone jak na rysunku:



W związku z tym, że elementy 2 i 3 są połączone równolegle, układ będzie działał poprawnie nawet jeśli jeden z nich ulegnie awarii. Natomiast w przypadku awarii elementu 1, układ nie będzie funkcjonował. Eksperyment polega na sprawdzeniu stanu każdego elementu (S – sprawny, U – uszkodzony). Określ i nazwij następujące zdarzenia:

a. A – funkcjonują dokładnie dwa z trzech elementów,

b. B – przynajmniej dwa elementy działają poprawnie,

c. C – układ działa,

d. C', $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że pozycja wyniku w krotce (x,y,z) jest przypisana do i-tego elementu. Tak więc x oznacza stan elementu pierwszego, y - drugiego, a z - trzeciego.

a. Na zdarzenie A składają się wszystkie sytuacje, w których działają dwa elementy, np. 1 i 2, 1 i 3 itd.

$$A=\{(S,S,U),(S,U,S),(U,S,S)\}.$$

b. Zdarzenie B określa stwierdzenie: dwa lub trzy elementy działają poprawnie:

$$B=\{(S,S,U),(S,U,S),(U,S,S),(S,S,S)\}.$$

Uwaga: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B.

c. Układ działa poprawnie jeśli element nr 1 jest sprawny oraz przynajmniej jeden z elementów 2 lub 3 działa poprawnie.

$$C=\{(S,S,S),(S,S,U),(S,U,S)\}.$$

d. C'– Układ nie działa.

$$C' = \Omega - C = \{(S,U,U),(U,S,S),(U,S,U),(U,U,S),(U,U,U)\}.$$

$A \cup C$ – poprawnie działają dwa (dowolne) lub trzy elementy.

$$A \cup C = \{(S,S,S),(S,S,U),(S,U,S),(U,S,S)\}.$$

$A \cap C$ – układ działa poprawnie, przy czym nastąpiła awaria elementu 2 lub 3.

$$A \cap C = \{(S,S,U),(S,U,S)\}.$$

$B \cup C = A \cup C$ – sprawne są dwa (dowolne) lub trzy elementy.

$$B \cup C = \{(S,S,S),(S,S,U),(S,U,S),(U,S,S)\}$$

$B \cap C$ – sprawne są dwa lub trzy elementy, przy czym zawsze sprawny jest element 1.

$$B \cap C = \{(S,S,S),(S,S,U),(S,U,S)\}.$$

Zadanie 9. (Źródło: [16])

Dane są następujące zbiory liczb rzeczywistych: $A=\{x:\ x^2-3x-5 > 0\}$, $B = \left\{x : \frac{3x-1}{5x+1} < 0\right\}$, $C=\{x: |x| = x\}$. Znajdź zbiory: $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B - C$.

Rozwiązanie:

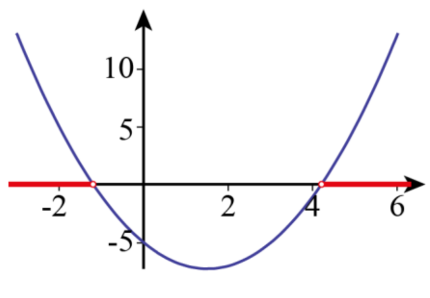
Aby określić zbiór A konieczne jest rozwiązanie równania kwadratowego:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} \approx -1{,}1926;\ x_2 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \approx 4{,}1926.$$

Tak więc do zbioru A wchodzą następujące liczby:

$$A = \left\{x : x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}; \infty\right)\right\}$$

$=\{x:\ x \in (-\infty,-1{,}1926) \cup (4{,}1926,\infty)\}$



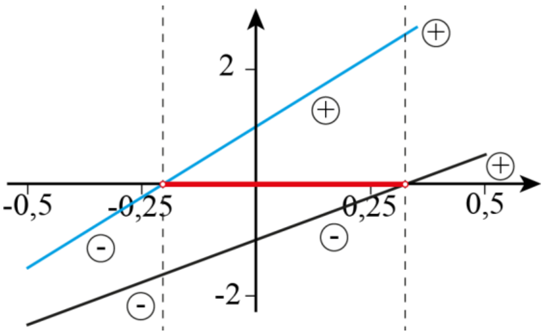
Zbiór A.

Żeby określić zbiór B, konieczne jest określenie miejsc zerowych mianownika i licznika tej funkcji:

$$x_L = \frac{1}{3}; \qquad x_M = -\frac{1}{5}.$$

Do zbioru B należą następujące liczby:

$$B = \left\{ x : x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right) \right\}$$



Zbiór *B*.

Do zbioru *C* należą wszystkie wartości nieujemne.

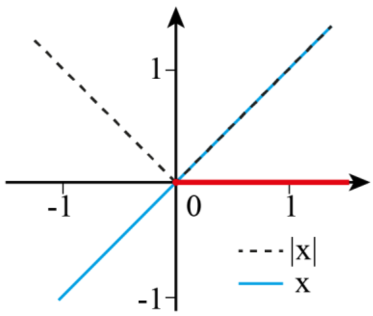
$$C = \{x: x \geq 0\}$$

Zatem wynikowe zbiory są następujące:

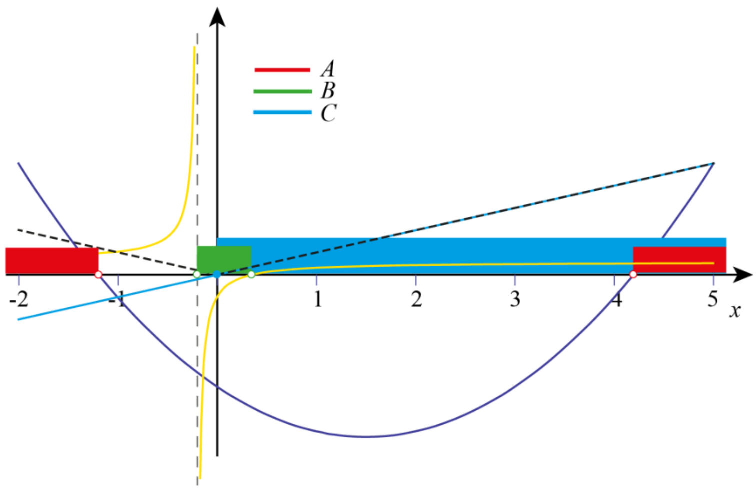
$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$A \cup B - C = \left\{ x : x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0 \right) \right\}$$



Zbiór *C*.



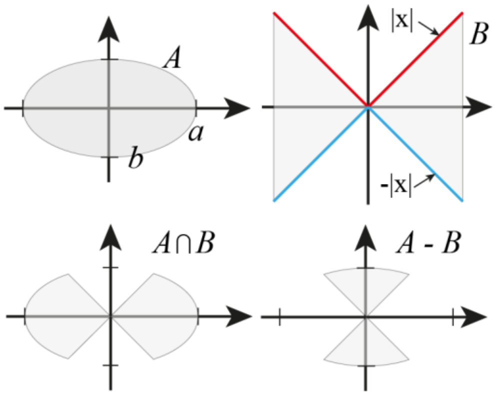
Zadanie 10. (Źródło: [16])

Dane są zbiory na płaszczyźnie: $A = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, $B = \{(x,y)\colon y^2 \leq x^2\}$. Narysuj i opisz zbiory: $A \cap B$ i A - B.

Rozwiązanie:

Zbiór A jest elipsą położoną w środku układu współrzędnych. Punkty należące do zbioru B znajdują się w obszarze ograniczonym prostymi $y = x$ oraz $y = -x$. Aby określić region należy dokonać przekształceń:

$$y^2 \le x^2$$
$$|y| \le |x|$$
$$\pm y \le |x|$$
$$y \le |x| \quad \wedge \quad -y \le |x|$$
$$y \le |x| \quad \wedge \quad y \ge -|x|$$
$$-|x| \le y \le |x|$$

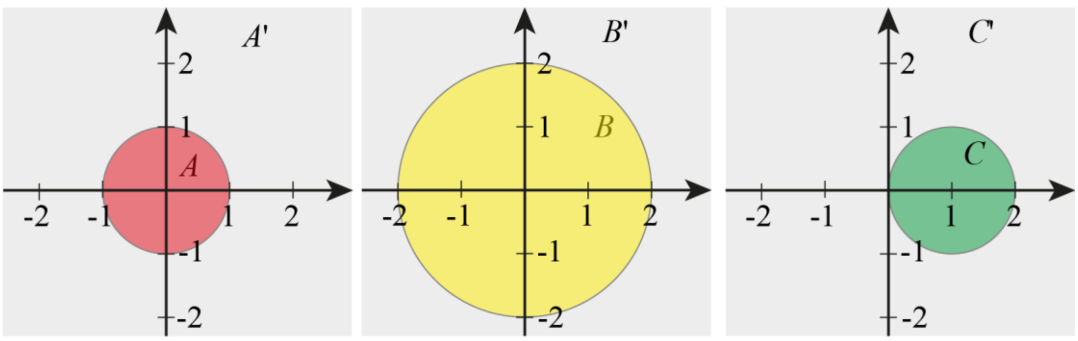


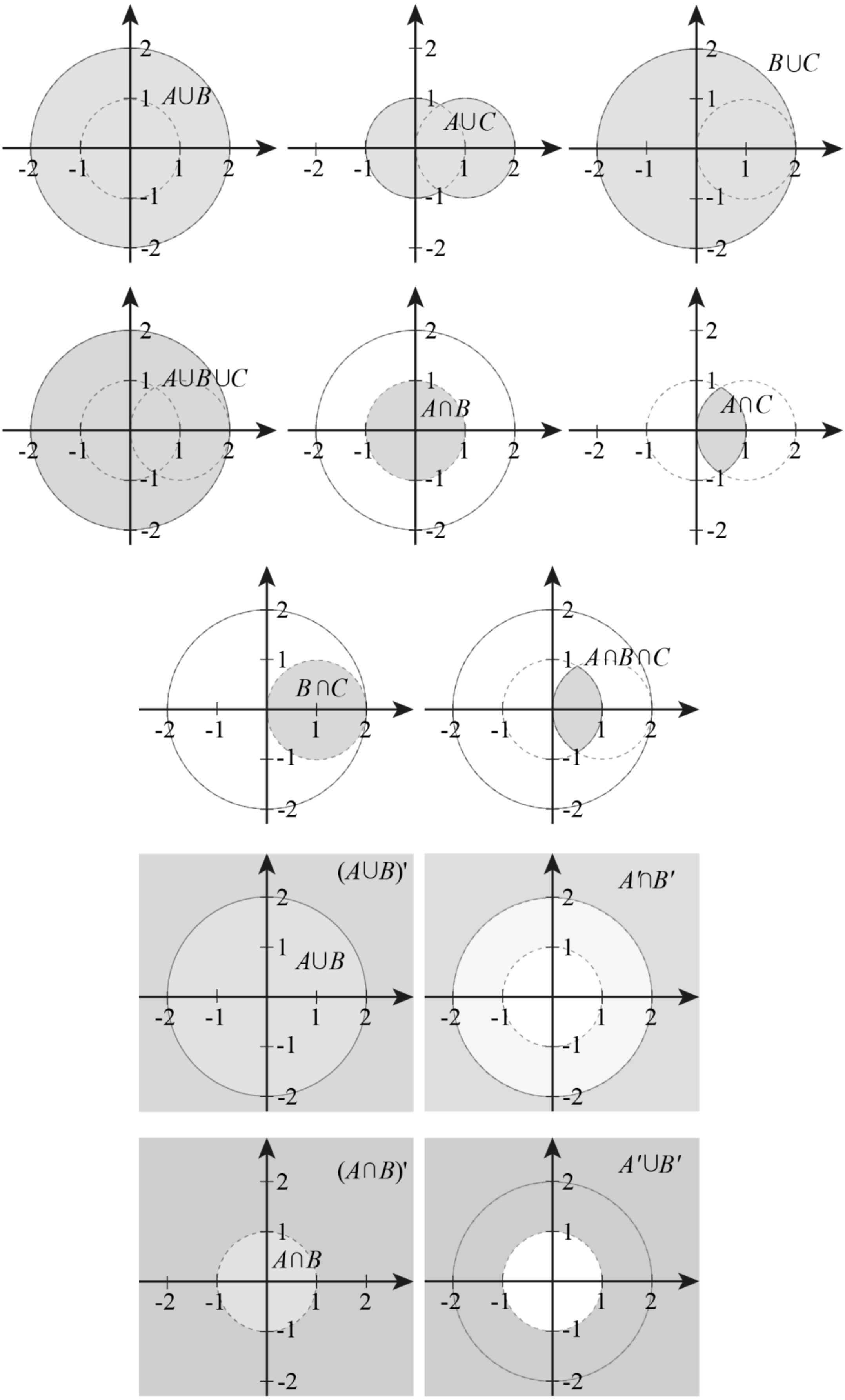
Zadanie 11. (Źródło: [11])

Niech A będzie zbiorem punktów (x,y), dla których $x^2 + y^2 < 1$, B – zbiorem punktów (x,y), dla których $x^2 + y^2 < 4$, C – zbiorem punktów (x,y), dla których $(x\text{-}1)^2 + y^2 < 1$. Znaleźć zbiory: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$. Przyjmując, że rozważaną przestrzenią jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny (x,y), wykazać, że $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Rozwiązanie:

Dane zbiory ograniczone są okręgami.




A∪B
A∪C
B∪C
A∪B∪C
A∩B
A∩C
B∩C
A∩B∩C
(A∪B)'
A∪B
A'∩B'
(A∩B)'
A∩B
A'∪B'

Zadanie 12. (Źródło: [12])

Na n kartkach wrzuconych do pudełka napisane są odpowiednio numery 1, 2, ..., n.

a. Losujemy w sposób przypadkowy jedną kartkę. Wyznaczyć zbiór zdarzeń elementarnych Ω.

b. Losujemy w sposób przypadkowy dwie kartki. Wyznaczyć zbiór zdarzeń elementarnych Ω.

Rozwiązanie:

a. Ω={k: 1, 2, ...n}

b. Z treści zadania wynika, że kolejność wylosowanych kartek nie ma znaczenia więc np. (1,3) i (3,1) traktujemy jako jedno i to samo zdarzenie. Zauważmy, że jedna kartka nie może być wylosowana dwukrotnie . Wypiszmy zatem zdarzenia elementarne:

$$\begin{aligned}\Omega=\{(1,2),\ &(1,3),\ \ldots,\ (1,n),\\ &(2,3),\ \ldots,\ (2,n),\\ &\ \ldots\\ &\quad (i,i+1),\ \ldots\ ,(n-1,n-2),\ (n-1,n)\ \}\end{aligned}$$

Zbiór zdarzeń elementarnych można opisać krócej jako: $\Omega=\{(i,j)$: $i = 1,2, ..., n\text{-}1 \wedge j=i+1\}$ – czyli wszystkie pary niepowtarzających się liczb, w których kolejność nie ma znaczenia. Np.:

n	Zbiór zdarzeń elementarnych
2	(1,2)
3	(1,2), (1,3), (2,3)
4	(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)

Zadanie 13.

Rzucono dwie kostki sześcienne do gry. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Rozwiązanie:

Ω={(⚀,⚀), (⚀,⚁),(⚀,⚂),(⚀,⚃),(⚀,⚄),(⚀,⚅),
(⚁,⚀), (⚁,⚁),(⚁,⚂),(⚁,⚃),(⚁,⚄),(⚁,⚅),
(⚂,⚀), (⚂,⚁),(⚂,⚂),(⚂,⚃),(⚂,⚄),(⚂,⚅),
(⚃,⚀), (⚃,⚁),(⚃,⚂),(⚃,⚃),(⚃,⚄),(⚃,⚅),
(⚄,⚀), (⚄,⚁),(⚄,⚂),(⚄,⚃),(⚄,⚄),(⚄,⚅),
(⚅,⚀), (⚅,⚁),(⚅,⚂),(⚅,⚃),(⚅,⚄),(⚅,⚅)}

Zadanie 14. (Źródło: [3])

Badano dwie przepompownie. W pierwszej są 4 pompy, a w drugiej 5. Wynikiem obserwacji jest liczba aktualnie pracujących pomp. Znajdź przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4),\\ &(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4),\\ &(2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4),\\ &(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4),\\ &(4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4),\\ &(5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}\end{aligned}$$

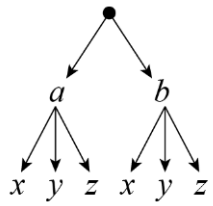
KOMBINATORYKA

Zadanie 15. (Źródło: [7])

Dane są zbiory: $A=\{a,b\}$, $B=\{x,y,z\}$. Ile różnych wyrazów dwuliterowych można otrzymać, wybierając najpierw jedną literę ze zbioru A, a następnie jedną literę ze zbioru B? Narysuj drzewko do tego zadania i wypisz wszystkie możliwe wyrazy.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia o mnożeniu wynika, że liczba dwuliterowych wyrazów możliwych do otrzymania w wyniku wyżej omówionego schematu jest równa iloczynowi liczebności obu zbiorów $k=\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}=2\cdot 3=6$. Słowa: $\{ax, ay, az, bx, by, bz\}$.

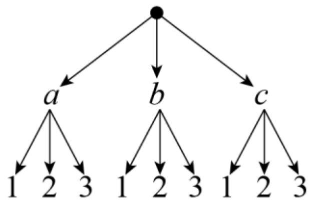


Zadanie 16. (Źródło: [7])

Dane są zbiory: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$. Ile różnych napisów złożonych z litery i cyfry można otrzymać, wybierając po jednym symbolu z każdego zbioru? Narysuj drzewko do tego zadania i wypisz wszystkie możliwe napisy.

Rozwiązanie:

$k=\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}=3\cdot 3=9$. Napisy: $\{a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3\}$.

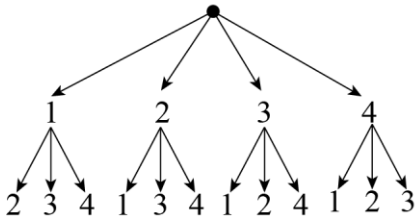


Zadanie 17. (Źródło: [7])

Ze zbioru A={1,2,3,4} losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry, w wyniku czego otrzymujemy liczbę dwucyfrową. Ile różnych liczb możemy w ten sposób otrzymać? Narysuj drzewko do tego zadania i wypisz wszystkie możliwe liczby.

Rozwiązanie:

Pierwszy raz losujemy jedną z czterech liczb. Drugi raz jedną z trzech więc $k = 4 \cdot 3 = 12$. Możliwe do otrzymania liczby to: {12, 13,14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43}.

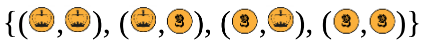


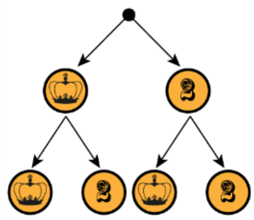
Zadanie 18. (Źródło: [7])

Ile różnych wyników można otrzymać przy dwukrotnym rzucie monetą? Narysuj drzewko do tego zadania i wypisz wszystkie możliwe wyniki.

Rozwiązanie:

$k = 2 \cdot 2 = 4$. Możliwe do uzyskania wyniki to:





Zadanie 19. (Źródło: [7])

Ile różnych wyników można otrzymać przy rzucie monetą i kostką?

Rozwiązanie: k=2·6=12.

Zadanie 20. (Źródło: [7])

Ze zbioru cyfr wybieramy kolejno dwie:

a. ze zwracaniem,

b. bez zwracania.

Ile możemy w ten sposób otrzymać różnych liczb dwucyfrowych?

Rozwiązanie:

Zbiór cyfr określony jest następująco: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. W rzędzie dziesiątek nie może pojawić się zero więc mamy 9 cyfr do wyboru.

a. Jeśli zwracamy uprzednio wylosowaną cyfrę to znaczy, że może się ona pojawić ponownie (w rzędzie jedności) więc $k_a = 9 \cdot 10 = 90$.

b. Jeśli cyfra wylosowana za pierwszym razem nie jest zwracana to losując drugi raz mamy do dyspozycji 9 cyfr, bo w rzędzie jedności może pojawić się zero, zatem $k_b = 9 \cdot 9 = 81$.

Zadanie 21. (Źródło: [7])

Ile różnych wyrazów dwuliterowych

a. dowolnych

b. o różnych literach

można ułożyć, zakładając, że alfabet liczy dwadzieścia cztery litery.

Rozwiązanie:

a. Jeśli wyrazy są dowolne to znaczy, że litery mogę się powtarzać więc dwukrotnie mamy do dyspozycji 24 litery więc $k_a = 24 \cdot 24 = 576$

b. Jeśli litery nie mogą się powtarzać, to za pierwszym razem są do dyspozycji 24 litery, za drugim 23 więc $k_b = 24 \cdot 23 = 552$

Zadanie 22.

W Polsce numer samochodu składa się z dwóch liter i pięciu cyfr. Przy założeniu, że każde możliwe do uzyskania dwuliterowe słowo i każda liczba, w której skład wchodzi od 1 do 5 cyfr mogą być wykorzystane (00001, 00002, ..., 99999), określ ile samochodów można zarejestrować.

Rozwiązanie:

Zakładając, że alfabet ma 24 litery, które mogą się powtarzać, to liczba dwuliterowych słów, które można utworzyć wynosi: $k_a = 24 \cdot 24 = 576$. Zbiór cyfr to $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. W związku z tym, że prawidłowym numerem jest również 00001 itp., to można w ten sposób uzyskać 10^5-1 liczb. Dodatkowo do każdego słowa można przyporządkować każdą możliwą do otrzymania liczbę. Zatem ostatecznie liczba możliwych do uzyskania w ten sposób rejestracji jest równa $k = 576 \cdot (10^5 - 1)$ =57599424.

Zadanie 23. (Źródło: [7])

Ile jest różnych liczb czterocyfrowych?

Rozwiązanie:

Zbiór cyfr to $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Pierwszą cyfrą nie może być 0, bo rezultatem byłaby liczba trzycyfrowa więc do wyboru jest 9 cyfr (1, ..., 9). Drugą, trzecią i czwartą liczbę można wybrać dowolnie ze zbioru cyfr więc $k = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Zadanie 24. (Źródło: [7])

Ile jest różnych liczb czterocyfrowych

a. parzystych,

b. nieparzystych?

Rozwiązanie:

Pierwszą cyfrą nie może być 0 więc do wyboru jest 9 cyfr. Dwie kolejne cyfry mogą być dowolne więc dwukrotnie dokonujemy wyboru z 10 cyfr.

a. Jeśli liczba ma być parzysta to musi kończyć się parzystą cyfrą $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ więc do dyspozycji jest 5 cyfr więc $k_a = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

b. Liczby nieparzyste kończą się jedną z pięciu cyfr ze zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ więc wynik jest identyczny jak w przykładzie a.

Zadanie 25. (Źródło: [7])

Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których w rzędzie jedności i dziesiątek występuje ta sama cyfra.

Rozwiązanie:

Dowolna liczba czterocyfrowa może zostać zapisana jako: *abcd*. Tak więc cyfrę *a* można wybrać na 9 sposobów, cyfrę *b* oraz *c* na 10. Natomiast ostatnią cyfrę *d* można wybrać tylko w jeden sposób, taki aby była ona identyczna z cyfrą *c*. $k = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 900$.

Zadanie 26. (Źródło: [7])

Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, o niepowtarzających się cyfrach?

Rozwiązanie:

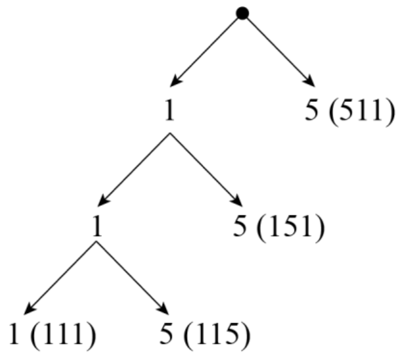
Wybierając pierwszą cyfrę mamy 9 możliwości (0 nie może być pierwszą cyfrą). Wybierając kolejną, drugą cyfrę mamy również 9 możliwości – cyfry od 0 do 9 z pominięciem wcześniej wybranej cyfry. Następnie można wybrać z 8 cyfr i 7. $k = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Zadanie 27. (Źródło: [7])

W urnie znajdują się cztery kule, trzy oznaczone numerem jeden i jedna oznaczona numerem 5. Z urny losujemy kolejno bez zwracania trzy kule, zapisując ich numery w kolejności losowania. Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy otrzymać?

Rozwiązanie:

Zadanie to najwygodniej jest rozwiązać przy pomocy drzewka. Z drzewka można odczytać, że możliwe do uzyskania są 4 liczby.



Zadanie 28. (Źródło: [7])

Ile istnieje funkcji odwzorowujących zbiór $X=\{1,2,3\}$ w zbiór $Y=\{a,b,c,d,e,f\}$?

Rozwiązanie:

Zadanie można traktować jak trzykrotne losowanie ze zbioru Y więc na podstawie twierdzenia o mnożeniu: $k = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Zadanie 29. (Źródło: [7])

Ile istnieje wariacji dwuwyrazowych z powtórzeniami zbioru:

a. jednoelementowego,

b. czteroelementowego,

c. n – elementowego.

Rozwiązanie:

a. Dwukrotnie losujemy jeden element ze zbioru jednoelementowego więc $k_a = 1 \cdot 1 = 1$.

b. Dwukrotnie losujemy jeden element ze zbioru czteroelementowego więc $k_b = 4 \cdot 4 = 16$.

c. Dwukrotnie losujemy jeden element ze zbioru *n*-elementowego więc $k_c = n \cdot n = n^2$.

Zadanie 30. (Źródło: [7])

Dziesięć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 rozmieszczono w czterech szufladach ponumerowanych od 1 do 4. Ile jest różnych możliwych rozmieszczeń?

Rozwiązanie:

Zadanie można traktować jak dziesięciokrotne losowanie z czteroelementowego zbioru: bierzemy pierwszą kulę i mamy do wyboru 4 szuflady, drugą kulę i znów do wyboru mamy 4 szuflady, itd. Więc wszystkich możliwych rozmieszczeń jest: $k = 4^{10}$.

Zadanie 31. (Źródło: [7])

Rzucamy

a. dwiema,

b. trzema,

c. czterema,

d. *n* monetami.

Ile istnieje wszystkich możliwych wyników rzutu?

Rozwiązanie:

a. $k_a = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$.

b. $k_b = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

c. $k_c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

d. $k_d = \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$.

Zadanie 32. (Źródło: [7])

Pięciu studentów zdaje egzamin. Wiadomo, że żaden student nie otrzyma oceny niedostatecznej. Na ile sposobów można wystawić im oceny (dostateczny, dobry, bardzo dobry)?

Rozwiązanie:

Zadanie można potraktować jak pięciokrotne losowanie ze zbioru trzyelementowego. $k = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^5 = 243$.

Zadanie 33. (Źródło: [7])

Z talii pięćdziesięciu dwu kart losujemy jedną, zwracamy ją, karty tasujemy i losujemy drugą. Ile jest możliwych wyników losowania?

Rozwiązanie: $k = 52\cdot 52 = 2704$.

Zadanie 34. (Źródło: [7])

W urnie znajduje się sześć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6. Losujemy kolejno cztery kule, zwracając je za każdym razem po zapisaniu ich numerów. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?

Rozwiązanie: $k = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^4 = 1296$.

Zadanie 35. (Źródło: [7])

Ile istnieje wariacji bez powtórzeń (permutacji) zbioru $\{a,b,c,d,e,f\}$

a. jednowyrazowych,

b. trójwyrazowych,

c. pięciowyrazowych,

d. sześciowyrazowych?

Rozwiązanie:

Aby wykonać obliczenia konieczne jest użycie wzoru na ilość permutacji k-elementowych z n-elementowego zbioru.

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a. $P_{1,6} = \dfrac{6!}{(6-1)!} = \dfrac{6\cdot 5!}{5!} = 6$,

b. $P_{3,6} = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 120$,

c. $P_{5,6} = \dfrac{6!}{(6-5)!} = \dfrac{6!}{1!} = 6! = 720$,

d. $P_{6,6} = \dfrac{6!}{(6-6)!} = \dfrac{6!}{0!} = 6! = 720$.

<u>Zadanie 36. (Źródło: [7])</u>

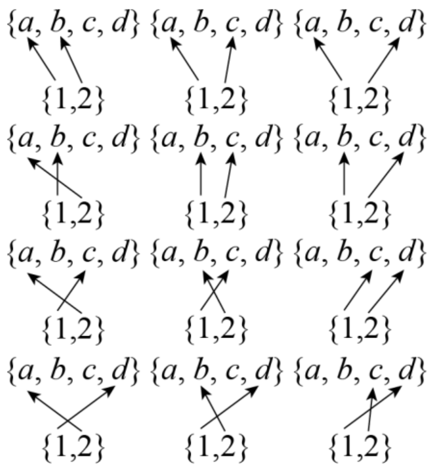
Ile istnieje funkcji różnowartościowych określonych na zbiorze $X=\{1,2\}$ o wartościach w zbiorze $Y=\{a,b,c,d\}$. Przedstaw je za pomocą grafów.

<u>Rozwiązanie</u>:

Jest to permutacja (wariacja bez powtórzeń) 2 elementowa ze zbioru 4 elementowego ponieważ, wartościom $\{1, 2\}$ można przyporządkować wartości $\{a,b,c,d\}$. Innymi słowy możemy utworzyć $P_{2,4}$ takich funkcji różnowartościowych.

$$P_{2,4} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12.$$

Po prawej stronie znajdują się grafy dla wszystkich takich funkcji.



<u>Zadanie 37. (Źródło: [7])</u>

W klasie liczącej trzydziestu siedmiu uczniów rozlosowano trzy bilety do trzech różnych teatrów. Ile jest różnych możliwych wyników losowania?

<u>Rozwiązanie</u>:

Pytanie można sformułować w sposób bardziej przejrzysty: na ile sposobów można wybrać trzech z trzydziestu siedmiu uczniów, żeby wręczyć im bilety do teatru. Ważną informacją jest to, że bilety różnią się. Zakładając, że jeden uczeń nie może dostać więcej niż jednego biletu to rozwiązaniem zadania jest określenie wartości $P_{3,37}$.

$$P_{3,37} = \frac{37!}{(37-3)!} = \frac{37\cdot 36\cdot 35\cdot 34!}{34!} = 46\,620.$$

Gdyby natomiast założyć, że dopuszczalna jest sytuacja, w której jeden z uczniów może otrzymać dwa, lub nawet trzy bilety, to celem obliczenia wyniku konieczne byłoby skorzystanie z twierdzenia o mnożeniu.

$$k = 37 \cdot 37 \cdot 37 = 50\,653.$$

Uwaga: Gdyby bilety były takie same (nie byłoby możliwości ich rozróżnienia) to odpowiedzią byłaby kombinacja 3 elementowa ze zbioru 37 elementowego, czyli $C_{3,37}$. W związku z tym, że bilety są różne kolejność losowania uczniów ma znaczenie. Żeby to lepiej zobrazować załóżmy sytuację, w której to nie bilety są losowane, ale kolejno samochód, komputer i czekolada.

Zadanie 38. (Źródło: [7])

Z miasta A do miasta B prowadzi pięć dróg. Iloma sposobami można odbyć podróż A→B→A pod warunkiem, że nie można wracać tą samą drogą?

Rozwiązanie:

Idąc z miasta A do B mamy do wyboru pięć dróg. Jeśli wracając nie możemy iść tą samą drogą, którą dostaliśmy się do miasta B, do wyboru zostają 4 drogi (korzystanie z twierdzenia o mnożeniu).

$$k = 5 \cdot 4 = 20.$$

Można też spojrzeć na to zadanie z innej strony: na ile sposobów można wybrać dwie drogi z pięciu, czyli jest to pytanie o permutację dwuelementową ze zbioru pięcioelementowego. Wynik oczywiście musi być identyczny.

$$P_{2,5} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Zadanie 39. (Źródło: [7])

W urnie jest sześć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6. Losujemy kolejno 6 kul bez zwracania. Ile jest możliwych wyników takiego losowania?

Rozwiązanie:

$$P_{6,6} = 6! = 720.$$

Zadanie 40. (Źródło: [7])

Ile różnych liczb pięciocyfrowych takich, aby żadna cyfra w liczbie się nie powtarzała można utworzyć z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4?

Rozwiązanie:

W zadaniu można wykorzystać twierdzenie o mnożeniu lub określić wynik za pomocą permutacji. Pierwszą cyfrą nie może być 0 więc wyboru mamy 4 cyfry. Następnie znów do wyboru mamy 4 cyfry, gdyż nie możemy użyć poprzednio wylosowanej, ale mamy do dyspozycji cyfrę zero. I dalej mamy do wyboru 3 cyfry, dwie i jedną. W ten sposób otrzymujemy $k = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ możliwych wyników.

Wynik otrzymamy również odejmując od liczby pięcioelementowych permutacji zbioru cyfr {0, 1, 2, 3, 4} liczbę czterocyfrowych permutacji zbioru {1, 2, 3, 4} (czyli liczb czterocyfrowych).

$$k = P_{5,5} - P_{4,4} = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Zadanie 41. (Źródło: [7])

Na przystanku do autobusu wsiada grupa pasażerów składająca się z sześciu kobiet i czterech mężczyzn. Ile istnieje wszystkich możliwych sposobów wejścia pasażerów do autobusu, jeżeli pierwsze wsiadają kobiety, wszyscy wsiadają tylko tylnymi drzwiami i wsiadanie odbywa się pojedynczo?

Rozwiązanie:

Kobiety mogą wejść do autobusu na $k = P_{6,6} = 6! = 720$ sposobów. Gdy już pozajmują miejsca dopiero wchodzą mężczyźni, którzy mają $m = P_{4,4} = 4! = 24$ możliwości wejścia. Dla każdego sposobu w jaki kobiety wchodziły do autobusu przypadają 24 możliwości ustawienia mężczyzn więc całkowita liczba sposobów, w jaki można zrealizować wejście do autobusu to $k \cdot m = 720 \cdot 24 = 17\,280$.

Zadanie 42. (Źródło: [7])

Ile istnieje podzbiorów:

a. dwuelementowych,

b. pięcioelementowych

zbioru siedmioelementowego.

Rozwiązanie:

W związku z tym, że kolejność wylosowanych elementów nie ma znaczenia (pytanie jest o ilość zbiorów, a nie sekwencji możliwych do uzyskania) do rozwiązania tego zadania należy użyć kombinacji.

a. $C_{2,7} = \dfrac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5!}{2!\cdot 5!} = \dfrac{7\cdot 6}{2} = 21,$

b. $C_{5,7} = \dfrac{7!}{5!\cdot(7-5)!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2!} = \dfrac{7\cdot 6}{2} = 21.$

Zadanie 43. (Źródło: [7])

Oblicz liczbę podzbiorów zbioru:

a. pustego

b. jednoelementowego

c. pięcioelementowego

d. *n* - elementowego

Rozwiązanie:

Liczba wszystkich możliwych podzbiorów danego zbioru o *n* elementach równa jest 2^n.

a. $2^0=1$,

b. $2^1=2$,

c. $2^5=32$. Można łatwo sprawdzić, że liczba ta równa się sumie kombinacji *k*-elementowych (*k*=0, 1, ..., *n*) ze zbioru *n*-elementowego:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{k,n} = \sum_{k=0}^{5} C_{k,5} = C_{0,5} + C_{1,5} + C_{2,5} + C_{3,5} + C_{4,5} + C_{5,5} = 32.$$

d. 2^n.

Zadanie 44. (Źródło: [7])

Na ile sposobów można rozdzielić cztery jednoosobowe zaproszenia na bal między pięć osób?

Rozwiązanie:

W związku z tym, że zaproszenia są identyczne, kolejność losowania nie ma znaczenia więc jest to kombinacja czteroelementowa ze zbioru pięcioelementowego.

$$C_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1!} = 5.$$

Zadanie 45. (Źródło: [7])

Z okazji zjazdu koleżeńskiego spotyka się dwunastu przyjaciół. Ile nastąpi powitań?

Rozwiązanie:

Zakładając, że osobiście będą się witać po dwie osoby, rozwiązaniem zadania będzie kombinacja dwuelementowa ze zbioru dwunastoelementowego.

$$C_{2,12} = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2! \cdot 10!} = 66.$$

Zadanie 46. (Źródło: [7])

Ile prostych jest wyznaczonych przez osiem punktów, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej?

Rozwiązanie:

Prostą na płaszczyźnie definiują dwa punkty więc jeśli żadne trzy punkty nie należą do jednej prostej, to znaczy, że każda para punktów definiuje jedną prostą. Prosta nie ma zwrotu więc liczba prostych, które można poprowadzić przez 8 punktów jest kombinacją dwuelementową z ośmiu.

$$C_{2,8} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

Uwaga: Gdybyśmy pytali o liczbę wektorów (wektor $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$), które można utworzyć na podstawie 8 punktów to odpowiedzią byłaby permutacja dwuelementowa ze zbioru ośmioelementowego $P_{2,8}$.

Zadanie 47. (Źródło: [7])

Ile płaszczyzn wyznacza pięć punktów, z których żadne cztery nie należą do jednej płaszczyzny?

Rozwiązanie:

Płaszczyznę w przestrzeni jednoznacznie definiują 3 punkty.

$$C_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Zadanie 48. (Źródło: [7])

Oblicz liczbę przekątnych *n*-kąta wypukłego.

Rozwiązanie:

Pytanie można sformułować inaczej: na ile sposobów można połączyć dwa z *n* punktów z pominięciem boków (czyli odcinków nie będących przekątnymi): $C_{2,n} - n$.

Zadanie 49. (Źródło: [7])

Na ile sposobów można wybrać bez zwracania trzynaście kart z talii pięćdziesięciu dwóch kart?

Rozwiązanie:

$$C_{13,52} = \frac{52!}{13! \cdot (52-13)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 40 \cdot 39!}{13! \cdot 39!} = 635\,013\,559\,600.$$

Uwaga: Gdyby interesowało nas ile sekwencji kart można otrzymać losując bez zwracania trzynaście kart z pięćdziesięciu dwóch to rozwiązaniem byłaby liczba permutacji trzynastoelementowych ze zbioru pięćdziesięciodwuelementowego: $P_{13,52}$.

Zadanie 50. (Źródło: [7])

W pudełku znajduje się piętnaście żarówek, w tym trzy przepalone. Losujemy bez zwracania pięć żarówek. Ile istnieje sposobów wylosowania samych dobrych żarówek?

Rozwiązanie:

Informacja o tym, że trzy żarówki są wadliwe nie ma wpływu na liczbę możliwych sposobów wylosowania pięciu z dwunastu dobrych żarówek.

$$C_{5,12} = \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = 792.$$

Zadanie 51. (Źródło: [7])

W pudełku znajduje się dwadzieścia śrub, w tym trzy wadliwe. Losujemy bez zwracania pięć śrub. Ile istnieje sposobów wylosowania jednej śruby wadliwej?

Rozwiązanie:

Pytanie można sformułować inaczej: Na ile sposobów można wylosować cztery śruby dobre i jedną wadliwą? Zatem, aby otrzymać cztery śruby dobre musimy obliczyć liczbę kombinacji czteroelementowych zbioru siedemnastoelementowego:

$$C_{4,17} = \frac{17!}{4! \cdot (17-4)!} = 2380.$$

Liczbę sposobów otrzymania śruby wadliwej określa kombinacja jednoelementowa ze zbioru trzyelementowego:

$$C_{1,3} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = 3.$$

W związku z tym, że na każdą kombinację śrub dobrych przypadają trzy możliwości wylosowania śruby złej to liczba sposobów, na które można otrzymać cztery śruby dobre i jedną wadliwą jest iloczynem wyżej przytoczonych kombinacji:

$$k = C_{4,17} \cdot C_{1,3} = 2380 \cdot 3 = 7140.$$

Zadanie 52. (Źródło: [7])

W przedziale wagonu kolejowego ustawione są na przeciw siebie dwie ławki mające po cztery ponumerowane miejsca od 1 do 4. Wszystkie miejsca w przedziale zostały zajęte. Na ile różnych sposobów mogą usiąść pasażerowie, jeśli wiadomo, że mogą zmienić miejsca tylko na ławce, na której siedzą, nie mogą jednak zmieniać ławek?

Rozwiązanie:

Na jednej ławce pasażerowie mają 4! możliwości. Dla każdej permutacji na jednej ławce odpowiada 4! permutacji na drugiej ławce więc jest

$$k = 4! \cdot 4! = 576$$

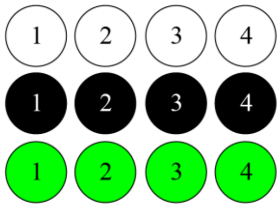
możliwości.

Zadanie 53. (Źródło: [7])

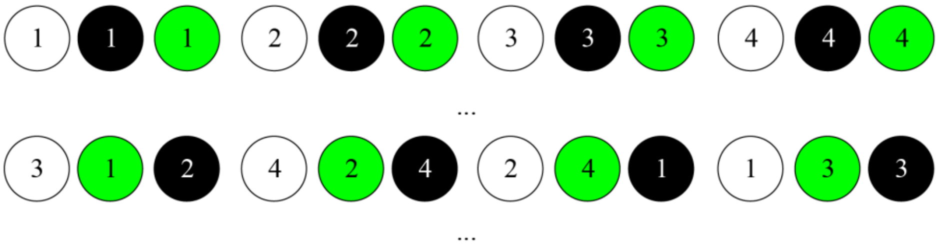
Cztery kule białe, cztery czarne i cztery zielone numerujemy i układamy obok siebie w szereg, tak aby każde trzy następujące po sobie kule były różnego koloru (np. biała, zielona, czarna). Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli kolejność barw jest ustalona (tzn. zawsze taka sama)?

Rozwiązanie:

Mamy następujący zbiór kul do wyboru:



Przykładowe układy możliwe do uzyskania przedstawione są na rysunku poniżej:



Zadanie to można rozwiązać stosując twierdzenie o mnożeniu: Wybieramy jedną z czterech kul. Następnie znów do wyboru mamy jedną z czterech kul innego koloru i ponownie. W ten sposób otrzymaliśmy pierwszą trójkę. Następnie mamy do wyboru jedną z trzech kul (o tym samym kolorze, co kula pierwsza w poprzedniej sekwencji), kolejna jest jedna z trzech kul o tym samym kolorze, co druga kula w pierwszej trójce itd.:

$$k = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13824.$$

Zadanie 54. (Źródło: [7])

Ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć z liczby 11112 przestawiając jej cyfry?

Rozwiązanie:

W związku z tym, że wszystkie cyfry oprócz 2 są takie same, rozwiązaniem jest liczba miejsc, w których można ulokować cyfrę 2. Miejsc takich jest 5.

11112
11121
11211
12111
21111

Zadanie 55.

Ile jest różnych wyrazów (mających sens lub nie), które można utworzyć ze słowa „statystyka", przy założeniu, ze wszystkie litery zostaną wykorzystane?

Rozwiązanie:

Słowo „statystyka" utworzone jest z następującego zbioru liter: {„a", „k", „s", „t", „y"}. Litery „a", „s", „y" występują w nim dwa razy, „t" trzy razy, natomiast litera „k" tylko jeden raz. Słów „statystyka" składa się zatem z 10 liter. Jeśli wynikowe słowa mają mieć tyle samo liter, trzeba uwzględnić fakt powtarzania się liter. Skoro litera „a" występuje w tym słowie 2 razy to sposobów na jakie możemy wybrać literę „a" do dziesięcioliterowego słowa jest $C_{2,10}$. Skoro 2 litery już wybraliśmy to pozostaje do uzupełnienia 8 miejsc. Litera „k" występuje raz więc liczba sposobów na jakie można ją wybrać do pozostałych siedmiu miejsc jest kombinacją jednoelementową z ośmioelementowego zbioru: $C_{1,8}$ itd. Na każdą liczbę sposobów w jaki można wybrać daną literę przypada liczba sposobów na jakie można wybrać pozostałe litery więc w celu znalezienia rozwiązania trzeba wykorzystać twierdzenie o mnożeniu:

$$N = \underset{a}{C_{2,10}} \cdot \underset{k}{C_{1,8}} \cdot \underset{s}{C_{2,7}} \cdot \underset{t}{C_{3,5}} \cdot \underset{y}{C_{2,2}} = 75\,600 .$$

Uwaga 1: Oczywiście kolejność w jakiej rozważamy litery nie ma znaczenia - wynik będzie ten sam.

Uwaga 2: Nie można w tym przykładzie wykorzystać permutacji, ponieważ litery mogą się powtarzać, a permutacja określa wszystkie możliwe sekwencje danego zbioru. W takim wypadku te same słowa zostałyby zliczone wielokrotnie. Gdyby słowo składało się z różnych liter, wówczas liczba wszystkich możliwych do utworzenia z jego liter słów byłaby równa $k!$ gdzie k oznacza liczbę liter w słowie.

Zadanie 56. (Źródło: [7])

Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach większych od 352?

Rozwiązanie:

Określmy ilość liczb większych od 352: wszystkie liczby o różnych cyfrach, w których w rzędzie setek jest liczba większa od 3, liczb takich jest $n_1 = 6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$. Wszystkie liczby, w których w rzędzie setek jest 3, a w rzędzie dziesiątek są liczby większe od 5, liczb takich jest $n_2 = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$. Także wszystkie liczby, w których w rzędzie setek jest 3, w rzędzie dziesiątek 5, a w rzędzie jedności liczba większa od 2, czyli $n_3 = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$. Ostatecznie:

$$n = 432 + 32 + 5 = 469.$$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zadanie 57.

Eksperyment polega na rzucie kostką sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania ściany z sześcioma oczkami (⚅)?

Rozwiązanie:

$$P(⚅) = \frac{1}{6}$$

Zadanie 58. (Źródło: [4])

Rzucamy dwie kostki do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wypadnie parzysta ilość oczek na obu kostkach i co najmniej na jednej z nich pojawi się ściana z sześcioma oczkami.

Rozwiązanie:

Wszystkich możliwych zdarzeń jest $6 \cdot 6=36$. Aby możliwe było określenie prawdopodobieństwa zajścia wyżej wymienionego zdarzenia konieczne jest określenie liczby zdarzeń sprzyjających. W tym przypadku wygodnie jest je wypisać: (6,2), (6,4), (6,6), (2,6), (4,6). Jak widać zdarzeń takich jest pięć więc prawdopodobieństwo tego, że wypadnie parzysta suma oczek na obu kostkach i co najmniej na jednej z nich pojawi się ściana z sześcioma oczkami wynosi

$$P = \frac{5}{36}.$$

Zadanie 59. (Źródło: [4])

Przy przewożeniu skrzyni zawierającej dwadzieścia jeden detali standardowych i dziesięć niestandardowych zgubiono jeden z nich, nie wiadomo którego typu. Po przywiezieniu ładunku wylosowano jeden detal – standardowy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zgubiono detal:

a. standardowy

b. niestandardowy.

Rozwiązanie:

Detal, który został wyciągnięty nie mógł zostać zgubiony więc zgubiony mógł zostać jeden z pozostałych trzydziestu detali (w tym dwudziestu standardowych i dziesięciu niestandardowych).

a. Prawdopodobieństwo tego, że zgubiono detal standardowy równe jest

$$P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

b. Prawdopodobieństwo tego, że zgubiono detal niestandardowy równe jest

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

<u>Zadanie 60. (Źródło: [4])</u>

Dana jest dwucyfrowa liczba, której cyfry są różne. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba dwucyfrowa

a. dowolna,

b. o różnych cyfrach

okaże się jej równa.

<u>*Rozwiązanie*</u>:

a. Wszystkich liczb dwucyfrowych, które można otrzymać jest $9 \cdot 10$, co stanowi liczbę zdarzeń w przestrzeni elementarnej. Prawdopodobieństwo, że dowolnie wylosowana liczba dwucyfrowa będzie równa z góry ustalonej liczbie wynosi

$$P_a = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{90}.$$

a. Skoro cyfry nie mogą się powtarzać to znaczy, że można otrzymać $9 \cdot 9$ takich liczb, a prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba będzie równa z góry ustalonej liczbie równe jest

$$P_b = \frac{1}{9 \cdot 9} = \frac{1}{81}.$$

<u>Zadanie 61. (Źródło: [4])</u>

Rzucono dwie kostki do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek na obu kostkach będzie równa siedem.

<u>*Rozwiązanie*</u>:

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych wynosi trzydzieści sześć. W celu rozwiązania zadania najwygodniej będzie wypisać zdarzenia sprzyjające: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Zdarzeń takich jest sześć więc prawdopodobieństwo wyniesie

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Zadanie 62. (Źródło: [4])

Rzucamy dwie sześcienne kostki do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a. suma wyrzuconych oczek równa się osiem, a różnica cztery,

b. suma wyrzuconych oczek równa się osiem, jeśli wiadomo, że ich różnica jest równa cztery.

Rozwiązanie:

Liczebność zbioru zdarzeń elementarnych wynosi trzydzieści sześć.

a. W celu rozwiązania wypiszmy wszystkie zdarzenia sprzyjające: (2,6), (6,2).

$$P_a = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b. Wypiszmy wszystkie zdarzenia, o których wiadomo, że różnica liczby oczek wynosi cztery: (1,5), (2,6), (6,2), (5,1). Skoro wiadomo, że różnica w liczbie oczek wynosi cztery, to wypisane wyżej zdarzenia elementarne należy uważać za przestrzeń zdarzeń elementarnych, a zdarzenia sprzyjające to (2,6), (6,2) więc

$$P_b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 63. (Źródło: [4])

W pudełku jest sześć jednakowych ponumerowanych sześcianów. Kolejno wyciągano w sposób losowy wszystkie sześciany z pudełka. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że numery wyciągniętych sześcianów pojawiały się w rosnącym porządku.

Rozwiązanie:

Ułożenie sześcianów w porządku rosnącym jest jedną z możliwych sekwencji. W celu określenia prawdopodobieństwa, że dokładnie taka sekwencja wystąpi konieczne jest obliczenie liczby możliwych do otrzymania sekwencji. Jest ich 6!

$$P = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Zadanie 64. (Źródło: [4])

Rzucamy dwa razy monetą. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pojawi się co najmniej raz awers.

Rozwiązanie:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych liczy cztery elementy. Możliwe do uzyskania wyniki to: {(,), (,), (,), (,)}. Jak można zauważyć, są trzy zdarzenia sprzyjające więc

$$P = \frac{3}{4}.$$

Zadanie 65. (Źródło: [4])

W paczce jest dwadzieścia kart oznaczonych numerami 101, 102, ..., 120 i dowolnie ułożonych. Pracownica losowo wyciąga dwie karty. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięte karty będą miały numery 101 i 120.

Rozwiązanie:

Aby określić przestrzeń zdarzeń elementarnych należy określić na ile sposobów można wylosować dwie karty z dwudziestu w taki sposób, że kolejność wylosowanych elementów nie ma znaczenia. Jest to kombinacja dwuelementowa z dwudziestoelementowego zbioru. Natomiast to, że zostaną wylosowane karty o numerach 101 i 120 jest jedną z możliwych kombinacji.

$$P = \frac{1}{C_{2,20}} = \frac{1}{190}.$$

Zadanie to można rozwiązać stosując jeszcze inne podejścia. Jeśli uwzględnimy kolejność losowania to wówczas istnieją dwa zdarzenia sprzyjające: (101, 120) oraz (120, 101), a przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z $n = 20 \cdot 19 = 380$ elementów (lub inaczej: jest dwuelementową permutacją ze zbioru dwudziestoelementowego $P_{2,20}$). Obliczone prawdopodobieństwo jest oczywiście identyczne.

Zadanie 66. (Źródło: [4])

W skrzyni jest dziesięć detali, oznaczonych numerami 1, 2, ..., 10. Losowo wyciągamy sześć detali. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wśród wyciągniętych detali będą znajdować się

a. detal nr 1,

b. detale nr 1 i 2.

Rozwiązanie:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych zawiera $C_{6,10}$ elementów – jest to liczba sposobów na jakie można wybrać sześć elementów z dziesięciu (przy założeniu, że ich kolejność nie ma znaczenia, co jest zgodne z treścią zadania).

a. Spośród wyciągniętych detali, jeden jest określony, a pięć może zostać wybranych dowolnie z dziewięciu, czyli jest to $1 \cdot C_{5,9}$. Prawdopodobieństwo zatem jest równe:

$$P = \frac{1 \cdot C_{5,9}}{C_{6,10}} = \frac{126}{210} = \frac{3}{5}.$$

Zadanie to można również rozwiązać stosując np. twierdzenie o mnożeniu. Sposobów w jaki możemy wybrać sześć z dziesięciu detali jest $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$. Żeby określić liczbę zdarzeń sprzyjających trzeba uwzględnić wszystkie możliwe pozycje, na których interesujący nas element został wylosowany:

$$k = \underbrace{1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{jako \quad pierwszy} + \underbrace{9 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{jako \quad drugi} + \ldots + \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1}_{jako \quad szósty} = 6 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) = 90\,720.$$

Obliczając iloraz k/n otrzymujemy prawdopodobieństwo P=3/5.

b.
$$P = \frac{1 \cdot 1 \cdot C_{4,8}}{C_{6,10}} = \frac{1}{3}.$$

Uwaga: Oczywiście wynik można również otrzymać stosując twierdzenie o mnożeniu, czy też obliczając permutacje, ale wówczas należy pamiętać o uwzględnieniu kolejności losowanych elementów zarówno przy określaniu liczebności przestrzeni zdarzeń elementarnych, jak i liczby zdarzeń sprzyjających.

Zadanie 67. (Źródło: [4])

Urządzenie składa się z pięciu elementów, z których dwa są zużyte. Przy włączaniu urządzenia w sposób przypadkowy włączają się dwa elementy. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że włączą się elementy sprawne.

Rozwiązanie:

Jeśli nie ma dla nas znaczenia kolejność w jakiej dwa losowo wybrane elementy się włączą to przestrzeń zdarzeń elementarnych ma $C_{2,5}$ elementów (na ile sposobów można wybrać dwa elementy ze zbioru pięcioelementowego). Liczba zdarzeń sprzyjających jest równa liczbie sposobów na jakie można wybrać dwa z trzech elementów, czyli $C_{2,3}$.

$$P = \frac{C_{2,3}}{C_{2,5}} = \frac{3}{10}.$$

Zadanie 68. (Źródło: [4])

W skrzyni znajduje się piętnaście detali, w tym dziesięć pomalowanych. Monter losowo wyciągnął trzy detale. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięte detale są pomalowane.

Rozwiązanie:

$$P = \frac{C_{3,10}}{C_{3,15}} = \frac{24}{91}.$$

Zadanie 69. (Źródło: [4])

W skrzyni znajduje się sto detali, w tym dziesięć jest wybrakowanych. losowo wyciągnięto cztery detale. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wśród wyciągniętych detali:

a. nie ma wybrakowanych

b. nie ma dobrych,

c. dwa detale są wybrakowane

Rozwiązanie:

a. $$P = \frac{C_{4,90}}{C_{4,100}} = \frac{15\,486}{23\,765} \approx 0{,}651,$$

b. $$P = \frac{C_{4,10}}{C_{4,100}} = \frac{2}{37\,345} \approx 0{,}0000535,$$

c. $$P = \frac{C_{2,10} \cdot C_{2,90}}{C_{4,100}} = \frac{2403}{52\,283} \approx 0{,}0459.$$

Zadanie 70. (Źródło: [4])

Do celu oddano dwadzieścia strzałów, z czego zarejestrowano osiemnaście trafnych. Znaleźć częstość względną (prawdopodobieństwo empiryczne) trafienia w cel.

Rozwiązanie:

Rozwiązaniem jest po prostu stosunek (proporcja) liczby trafień do liczby wszystkich strzałów. Korzysta się tu z tzw. częstościowej (statystycznej) definicji prawdopodobieństwa).

$$P = \frac{18}{20} = 0{,}9\,.$$

Zadanie 71. (Źródło: [4])

Odcinek L o długości dwudziestu centymetrów zawiera mniejszy odcinek l o długości dziesięciu centymetrów. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt na większym odcinku trafi także i w mniejszy odcinek. (Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia punktu w odcinek jest proporcjonalne do długości odcinka i nie zależy od jego położenia).

Rozwiązanie:

Zgodnie z geometryczną interpretacją prawdopodobieństwa jest to stosunek długości odcinków:

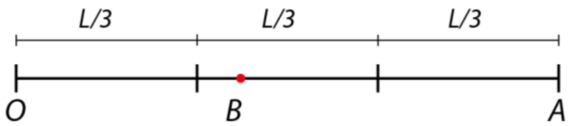
$$P = \frac{l}{L} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}\,.$$

Zadanie 72. (Źródło: [4])

Na odcinku OA o długości L losowo wybrano punkt B. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że mniejszy z odcinków OB i BA będzie miał długość większą niż 1/3 L.

Rozwiązanie:

Jeśli mniejszy z dwóch powstałych odcinków ma być większy od 1/3 L to punkt B musi znaleźć się w środkowej części odcinka L.



Zatem prawdopodobieństwo wyniesie:

$$P = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}\,.$$

Zadanie 73. (Źródło: [4])

W koło o promieniu R wpisano mniejsze koło o promieniu r. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo „rzucony” punkt w większe koło, trafi także w małe koło.

Rozwiązanie:

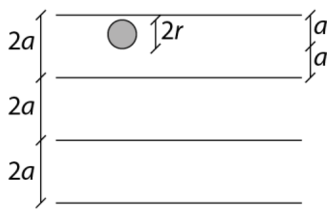
Zakładając, że prawdopodobieństwo trafienia w dowolny punkt większego koła jest takie samo dla każdego punktu, to prawdopodobieństwo trafienia w małe koło jest równe stosunkowi pól tych kół:

$$P = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Zadanie 74. (Źródło: [4])

Płaszczyznę poliniowano prostymi równoległymi, między którymi odległość wynosi $2a$. Na płaszczyznę tę losowo rzucono monetę o promieniu $r < a$. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie na żadną z tych prostych.

Rozwiązanie:



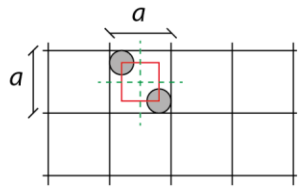
Jeśli moneta nie ma przecinać linii to znaczy, że musi upaść między liniami. Żeby tak się stało to środek monety musi upaść w miejscu znajdującym się w górę, lub w dół od wartości a między liniami, nie dalej niż na odcinku a-r, czyli w górę, lub w dół (dlatego mnożenie przez dwa) od a o a-r. W związku z tym prawdopodobieństwo będzie równe:

$$P = \frac{2 \cdot (a - r)}{2 \cdot a} = \frac{a - r}{a}.$$

Zadanie 75. (Źródło: [4])

Na płaszczyznę naniesiono siatkę kwadratową o boku a. Na płaszczyznę tę losowo rzucono monetę o promieniu $r < a/2$. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie ani na jeden bok kwadratu.

Rozwiązanie:



Z treści zadania wynika, że zarówno w kierunku pionowym jak i poziomym środek monety musi znaleźć się w takim miejscu, żeby jej krawędź nie dotknęła linii. Tzn. musi znaleźć się w kwadracie, którego środek jest w punkcie (a/2, a/2). Zatem prawdopodobieństwo tego, że tak się stanie jest równe stosunkowi pól czerwonego kwadratu i kwadratu powstałego z narysowanych linii. W celu określenia pola czerwonego kwadratu konieczne jest znalezienie długości jego boku. Długość boku tego kwadratu równa $a/2$-r.

$$P = \frac{(2\cdot(a/2-r))^2}{a^2} = \frac{(a-2\cdot r)^2}{a^2}.$$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zadanie 76. (Źródło: [4])

W bibliotece na półce ustawiono w losowym porządku piętnaście podręczników, przy czym pięć z nich było w oprawie. Bibliotekarz wyciągnął na chybił trafił trzy podręczniki. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden z nich jest w oprawie.

Rozwiązanie:

Zdarzenie „co najmniej jeden z wyciągniętych trzech podręczników jest w oprawie” będzie miało miejsce, jeśli zajdzie dowolne z następujących zdarzeń wykluczających się: B – jeden podręcznik jest w oprawie, dwa bez; C – dwa podręczniki są w oprawie, jeden bez; D – trzy podręczniki są w oprawie. Więc interesujące nas zdarzenie można zapisać jako:

$$A=B\cup C\cup D.$$

Na podstawie twierdzenia o dodawaniu prawdopodobieństw można zapisać:

$$P(A)= P(B)+ P(C)+ P(D),$$

gdzie:

$$P(B) = \frac{C_{1,5}\cdot C_{2,10}}{C_{3,15}} = \frac{45}{91},$$

$$P(C) = \frac{C_{2,5}\cdot C_{1,10}}{C_{3,15}} = \frac{20}{91},$$

$$P(D) = \frac{C_{3,5}}{C_{3,15}} = \frac{2}{91}.$$

Zatem wynik to:

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}.$$

Zadanie to można rozwiązać korzystając w własności $P(\overline{A}) + P(A) = 1$. Jest to sposób wygodniejszy, ponieważ konieczne jest jedynie obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „żaden z podręczników nie miał oprawy”, czyli:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{3,10}}{C_{3,15}} = \frac{24}{91},$$

a prawdopodobieństwo zdarzenia *A* wynosi:

$$P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Zadanie 77. (Źródło: [4])

W skrzyni znajduje się dziesięć detali, z których cztery są pomalowane. Monter losowo wyciągnął trzy detale. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden z wyciągniętych detali jest pomalowany.

Rozwiązanie:

Zdarzenie wystąpi jeśli w wylosowanych trzech detalach będzie jeden, dwa, lub trzy które zostały pomalowane. Czyli zdarzenie, którego prawdopodobieństwo wystąpienia szukamy, jest zdarzeniem złożonym. Oznaczmy: *A* – w wylosowanych jest jeden detal pomalowany, *B* – dwa detale pomalowane, *C* – trzy detale pomalowane. Zatem zdarzenie, którego prawdopodobieństwa szukamy można oznaczyć jako:

$$D = A \cup B \cup C.$$

Obliczmy prawdopodobieństwa zdarzeń składowych:

$$P(A)=\frac{C_{1,4}\cdot C_{2,6}}{C_{3,10}}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{C_{2,4}\cdot C_{1,6}}{C_{3,10}}=\frac{3}{10}$$

$$P(C)=\frac{C_{3,4}}{C_{3,10}}=\frac{1}{30}$$

Więc:

$$P(D)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{5}{6}.$$

Zadanie to można rozwiązać, obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego i korzystając z własności $P(\overline{D})+P(D)=1$, gdzie $\overline{D}$ jest zdarzeniem określonym jako „w wylosowanych trzech elementach nie ma żadnego pomalowanego”, czyli:

$$P(\overline{D})=\frac{C_{3,6}}{C_{3,10}}=\frac{1}{6},$$

a prawdopodobieństwo zdarzenia *D* jest równe:

$$P(D)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

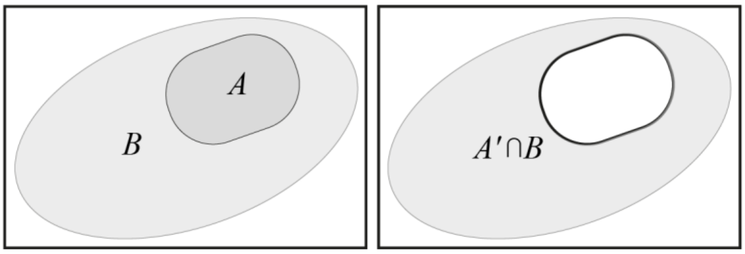
Zadanie 78. (Źródło: [4])

Udowodnić, że jeśli zdarzenie *A* pociąga za sobą zdarzenie *B*, to $P(B)\geq P(A)$.

Rozwiązanie:

Mówimy, że zdarzenie *A* pociąga za sobą zdarzenie *B*, jeśli się w nim zawiera tzn. $A\subset B$. Czyli jeśli zaszło zdarzenie *A*, to musiało również zajść zdarzenie *B*.

Przedstawmy zdarzenie *B* w następującej postaci: $B=A\cup(A'\cap B)$. Sytuację taką przedstawiają poniższe diagramy Venna.



$$P(B) = P(A \cup (A' \cap B))$$

$$P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$$

W związku z tym, że $P(A' \cap B) \geq 0$ to $P(B) \geq P(A)$.

Zadanie 79. (Źródło: [4])

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z dwóch zdarzeń niezależnych A_1 i A_2 są odpowiednio równe p_1 i p_2. Znaleźć prawdopodobieństwo zajścia tylko jednego z tych zdarzeń.

Rozwiązanie:

Szukamy prawdopodobieństwa tego że zajdzie zdarzenie A_1 i nie zajdzie zdarzenie A_2 lub nie zajdzie zdarzenie A_1 i zajdzie zdarzenie A_2. Wyraźmy to przy pomocy rachunku zbiorów:

$$p = P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)).$$

Na podstawie własności prawdopodobieństwa należy przekształcić powyższe wyrażenie tak, aby możliwe było wykorzystanie informacji, że $P(A_1)=p_1$ i $P(A_2)=p_2$.

$$p = P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) = P(A_1 \cap A_2') + P(A_1' \cap A_2) - P((A_1 \cap A_2') \cap (A_1' \cap A_2))$$

Z własności rachunku zbiorów wynika, że $(A_1 \cap A_2') \cap (A_1' \cap A_2) = \emptyset$ więc $P((A_1 \cap A_2') \cap (A_1' \cap A_2)) = 0$. Jeśli zdarzenia A_1 i A_2 są niezależne, to znaczy, że $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. Analogiczne zależności są spełnione dla zdarzeń przeciwnych więc:

$$p = P(A_1) \cdot P(A_2') + P(A_1') \cdot P(A_2)$$

Wiadomo, że dla dowolnego zdarzenia zachodzi $P(\overline{A}) + P(A) = 1$ więc:

$$p = p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2 = (p_1 - p_1 \cdot p_2) + (p_2 - p_1 \cdot p_2) = p_1 + p_2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2.$$

Zadanie 80. (Źródło: [4])

Do sygnalizacji awaryjnej użyto dwóch sygnalizatorów pracujących niezależnie. Prawdopodobieństwo włączenia się przy awarii pierwszego sygnalizatora jest równe p_1=0,95, a drugiego p_2=0,9. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że przy awarii włączy się tylko jeden sygnalizator.

Rozwiązanie:

Interesujące nas zdarzenie można opisać następująco: w trakcie awarii zadziała sygnalizator pierwszy i nie zadziała sygnalizator drugi lub nie zadziała sygnalizator pierwszy i zadziała sygnalizator drugi. Oznaczając A_1 – zadziała sygnalizator pierwszy, A_2 – zadziała sygnalizator drugi, szukane zdarzenie można zapisać jako: $(A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)$, zauważając, że $(A_1 \cap A_2') \cap (A_1' \cap A_2) = \emptyset$ prawdopodobieństwo wyniesie:

$$P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) = p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}14.$$

Zadanie 81. (Źródło: [4])

Prawdopodobieństwo jednokrotnego trafienia w cel przy jednej salwie z dwóch dział jest równe 0,38. Znaleźć prawdopodobieństwo trafienia w cel przy jednym wystrzale z pierwszego działa, jeśli wiadomo, że dla drugiego działa prawdopodobieństwo to jest równe 0,8.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że nastąpi trafienie z działa pierwszego (a drugie działo chybi) lub że pierwsze działo chybi a drugie trafi wynosi 0,38. Zapisując A_1 – pocisk wystrzelony z działa pierwszego trafi w cel, A_2 – pocisk wystrzelony z działa drugiego trafi w cel oraz $P(A_2)$=0,8 otrzymuje się:

$$P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) = P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) + (1 - P(A_1)) \cdot P(A_2)$$

$$P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) = P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) - P(A_2) = P(A_1) \cdot (1 - 2 \cdot P(A_2))$$

$$P(A_1) = \frac{P((A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)) - P(A_2)}{(1 - 2 \cdot P(A_2))} = \frac{0{,}38 - 0{,}8}{1 - 2 \cdot 0{,}8} = 0{,}7$$

Zadanie 82. (Źródło: [4])

Oddział kontroli technicznej sprawdzał wyroby. Prawdopodobieństwo tego, że wyrób jest standardowy wynosi 0,8. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że z dwóch sprawdzonych wyrobów tylko jeden jest standardowy.

Rozwiązanie:

$$P = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32\,.$$

Zadanie 83. (Źródło: [4])

Prawdopodobieństwo tego, że przy jednym pomiarze pewnej wielkości fizycznej zostanie popełniony błąd przekraczający daną dokładność, jest równe 0,4. Przeprowadzono trzy niezależne pomiary. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że tylko w jednym pomiarze popełniono błąd przekraczający określoną dokładność.

Rozwiązanie:

Szukamy prawdopodobieństwa tego, że tylko jeden pomiar będzie niedokładny. Pomiaru dokonujemy trzykrotnie więc pierwszy, drugi lub trzeci pomiar może być niedokładny, podczas gdy pozostałe dwa są poprawne. Oznaczmy p=0,4. W związku z tym:

$$P = p \cdot (1-p) \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot (1-p) \cdot p$$

$$P = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}432\,.$$

Zadanie 84. (Źródło: [4])

Student poszukiwał potrzebnego mu wzoru w trzech poradnikach. Prawdopodobieństwa tego, że wzór znajduje się w pierwszym, drugim lub w trzecim poradniku są równe odpowiednio: p_1=0,6, p_2=0,7 i p_3=0,8. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wzór znajduje się:

a. tylko w jednym poradniku,

b. tylko w dwóch poradnikach,

c. we wszystkich trzech poradnikach.

Rozwiązanie:

a. Zdarzenie, że wzór znajduje się tylko w jednym poradniku można zapisać jako: wzór znajduje się w pierwszym poradniku i nie ma go w drugim i trzecim lub wzór znajduje się w drugim, ale nie ma go w pierwszym i trzecim lub wzoru nie ma w pierwszym i drugim, ale znajduje się w trzecim.

$$P = p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 = 0{,}188.$$

b. $P = p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}452.$

c. $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}336.$

Zadanie 85. (Źródło: [4])

Prawdopodobieństwo tego, że potrzebny monterowi detal znajduje się w pierwszej, drugiej, trzeciej lub czwartej skrzyni, są odpowiednio równe: p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,8, p_4=0,9. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że detal znajduje się:

a. najwyżej w trzech skrzyniach,

b. co najmniej w dwóch skrzyniach.

Rozwiązanie:

a. Najwygodniej rozwiązać to zadanie określając zdarzenie odwrotne, czyli: detal znajduje się w czterech skrzyniach:

$$P(A') = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0{,}3024,$$

a następnie określając prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

b. W tym przypadku również wygodniej jest wykorzystać prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: W żadnej skrzyni nie ma detalu, lub jest tylko w jednej ze skrzyń:

$$P(B') = (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) \cdot (1-p_4) + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) \cdot (1-p_4) +$$
$$(1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) \cdot (1-p_4) + (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 \cdot (1-p_4) +$$
$$(1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) \cdot p_4 = 0{,}0428.$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0{,}0428 = 0{,}9572.$$

Zadanie 86. (Źródło: [4])

Rzucamy trzy kostki do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a. na każdej kostce wypadnie 5 oczek,

b. na każdej kostce wypadnie jednakowa liczba oczek.

Rozwiązanie:

Przy rzucie trzema kostkami przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 6^3 elementów.

a. Sytuacja, w której na każdej kostce wypadło pięć oczek jest jedna, więc

$$P(A)=\frac{1}{6^3}=0{,}00462963.$$

b. Zdarzeń polegających na tym, że na każdej kostce wypadnie taka sama liczba oczek jest sześć: na wszystkich kostkach wypadło jedno oczko, dwa oczka itd.

$$P(A)=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{6^2}=0{,}0277778.$$

Zadanie 87. (Źródło: [4])

Rzucamy trzy kostki do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a. na dwóch kostkach wypadnie po jednym oczku, a na trzeciej kostce inna liczba oczek,

b. na dwóch kostkach wypadnie jednakowa liczba oczek, a na trzeciej inna liczba oczek,

c. na każdej kostce wypadnie różna liczba oczek.

Rozwiązanie:

Przy rzucie trzema kostkami przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 6^3 elementów.

a. Zdarzenie oznacza, że na pierwszej i drugiej kostce wypadło jedno oczko, a na trzeciej dowolna inna liczba oczek (czyli jest pięć możliwości), lub na pierwszej i trzeciej kostce wypadło jedno oczko, a na drugiej dowolna inna liczba oczek, lub na pierwszej kostce wypadło od dwóch do sześciu oczek, a na drugiej i trzeciej jedno oczko.

$$P(A)=\frac{1\cdot 1\cdot 5+1\cdot 5\cdot 1+5\cdot 1\cdot 1}{6^3}=\frac{3\cdot 5}{6^3}=C_{2,3}\cdot\left(\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{72}.$$

b. Przy rzucie pierwszą kostką mamy do wyboru sześć liczb. Jeśli na drugiej kostce ma wypaść taka sama liczba to można ją wybrać tylko na jeden sposób. Na trzeciej kostce pozostaje pięć liczb do wyboru. Rozumowanie takie można powtórzyć dla każdej z kostek więc są trzy takie możliwości więc

$$P(B)=3\frac{6\cdot 1\cdot 5}{6^3}=\frac{5}{12}.$$

c.
$$P(C)=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3}=\frac{5}{9}.$$

Zadanie 88. (Źródło: [4])

Ile kostek do gry należy rzucić, aby można było oczekiwać z prawdopodobieństwem mniejszym niż 0,3, że na ani jednej kostce nie wypadnie sześć oczek?

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo, że na jednej kostce nie wypadnie sześć oczek wynosi $P(A_1) = \frac{5}{6}$.

Prawdopodobieństwo, zdarzenia polegającego na tym, że na żadnej z n kostek nie wypadnie sześć oczek wynosi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Zatem aby znaleźć n należy rozwiązać nierówność $0{,}3 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$$\ln(0{,}3) > \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\ln(0{,}3) > n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{\ln(0{,}3)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < n$$

$$6{,}60357 < n$$

Prawdopodobieństwo, że na żadnej kostek nie wypadnie sześć oczek będzie mniejsze od 0,3 jeśli kostek będzie przynajmniej siedem.

Uwaga: ln(5/6)= - 0,182322 < 0 więc znak nierówności zmienia kierunek.

Zadanie 89. (Źródło: [4])

Odcinek podzielono na trzy równe części. Na tym odcinku losowo wybrano trzy punkty. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, ze na każdą z trzech równych części odcinka trafi jeden punkt.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo, że jeden punkt znajdzie się w którejś z trzech części odcinka wynosi $\frac{1}{3}$. Losując pierwszy punkt mamy do wyboru trzy odcinki, drugi – dwa odcinki, trzeci – jeden odcinek. Zatem

$$P = \left(3\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{3}\right) = 3!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}.$$

<u>Zadanie 90. (Źródło: [4])</u>

W czytelni znajduje się sześć podręczników do rachunku prawdopodobieństwa, z których trzy są w oprawie. Bibliotekarz losowo wyciągnął dwa podręczniki. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że oba wyciągnięte podręczniki są w oprawie.

<u>Rozwiązanie</u>:

$$P = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Uwaga: Zadanie to można również interpretować jako obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego zdarzenia: drugi podręcznik jest w oprawie, jeśli pierwszy wylosowany podręcznik jest oprawiony.

<u>Zadanie 91. (Źródło: [4])</u>

Średnia liczba dni pochmurnych w lipcu dla pewnej miejscowości jest równa sześć. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pierwszego i drugiego lipca będzie pogodnie.

<u>Rozwiązanie</u>:

Lipiec ma 31 dni. Średnia liczba dni pogodnych wyniesie więc 25. Jeśli dwa dni mają być pogodne to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi:

$$P = \frac{25}{31}\cdot\frac{24}{30} = \frac{20}{31}.$$

<u>Zadanie 92. (Źródło: [4])</u>

Student umie odpowiedzieć na dwadzieścia spośród dwudziestu pięciu pytań egzaminacyjnych. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że student odpowie na zadane mu trzy pytania.

<u>Rozwiązanie</u>:

$$P=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

<u>**Zadanie 93. (Źródło: [4])**</u>

Znaleźć prawdopodobieństwo $P(A)$ mając dane prawdopodobieństwa $P(A\cap B)=0{,}72$ i $P(A\cup B')=0{,}18$.

<u>Rozwiązanie</u>:

Zauważmy, że każde zdarzenie możemy przedstawić jako sumę dwóch zdarzeń wyłączających się: $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$ (zob. zad. 78). Zatem:

$$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap B'))$$

$$P(A)=P(A\cap B)+(A\cap B')=0{,}72+0{,}18=0{,}9$$

<u>**Zadanie 94. (Źródło: [4])**</u>

Znaleźć prawdopodobieństwo $P(A\cap B')$ mając dane prawdopodobieństwa $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A\cup B)=c$.

<u>Rozwiązanie</u>:

Każde zdarzenie możemy przedstawić jako sumę dwóch zdarzeń wyłączających się: $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$. Zatem

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$$

stąd

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B) \qquad (1)$$

Natomiast $P(A\cap B)$ możemy znaleźć korzystając z

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B) \qquad (2)$$

Podstawiając (2) do (1) otrzymuje się:

$$P(A\cap B')=P(A)-(P(A)+P(B)-P(A\cup B))$$

$$P(A\cap B')=a-a-b+c=c-b$$

<u>**Zadanie 95. (Źródło: [4])**</u>

Do obwodu elektrycznego włączono szeregowo trzy elementy pracujące niezależnie. Prawdopodobieństwa awarii elementów są równe odpowiednio p_1=0,1, p_2=0,15, p_3=0,2. Znaleźć prawdopodobieństwo, że obwód nie będzie przewodził prądu.

<u>*Rozwiązanie*</u>:
W połączeniu szeregowym wszystkie elementy muszą być sprawne, aby płynął prąd. Najwygodniej jest rozwiązać to zadanie znajdując prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia przeciwnego A' – prąd będzie płynął.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}388$$

<u>Zadanie 96. (Źródło: [4])</u>
Urządzenie składa się z dwóch niezależnie pracujących elementów. Prawdopodobieństwa zepsucia się pierwszego i drugiego elementu są równe odpowiednio 0,05 i 0,08. Znaleźć prawdopodobieństwo zepsucia się urządzenia, tzn. zepsucia się co najmniej jednego elementu.

<u>*Rozwiązanie*</u>:
Konieczne jest obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia: pierwszy element działa poprawnie i drugi uległ awarii lub pierwszy uległ awarii i drugi działa lub oba uległy awarii.

$$P = 0{,}05 \cdot (1 - 0{,}08) + (1 - 0{,}05) \cdot 0{,}08 + 0{,}05 \cdot 0{,}08 = 0{,}126$$

<u>Zadanie 97. (Źródło: [4])</u>
Trzech badaczy, niezależnie jeden od drugiego, przeprowadza pomiary pewnej wielkości fizycznej. Prawdopodobieństwo tego, że pierwszy badacz popełni błąd przy odczytywaniu wyniku pomiaru jest równe 0,1. Dla drugiego i trzeciego badacza prawdopodobieństwo to jest równe odpowiednio 0,15 i 0,2. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że przy jednokrotnym pomiarze co najmniej jeden z badaczy popełni błąd.

<u>*Rozwiązanie*</u>:
Najwygodniej jest rozwiązać to zadanie znajdując prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia przeciwnego A'– żaden z badaczy się nie pomyli.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}388.$$

<u>Zadanie 98. (Źródło: [4])</u>

Inżynier przeprowadza wielokrotne pomiary pewnej wielkości fizycznej. Prawdopodobieństwo tego, że przy odczytywaniu wskazań przyrządu inżynier popełni błąd, jest równe p. Znaleźć najmniejszą liczbę pomiarów, które powinien przeprowadzić inżynier, aby z prawdopodobieństwem $P>\alpha$ można było oczekiwać, że co najmniej jeden wynik pomiaru okaże się błędnym.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo, że przy n pomiarach żaden z wyników nie będzie błędny wynosi $(1-p)^n$. Prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden wynik będzie błędny będzie zatem równe $1-(1-p)^n$. Ta wartość ma być większa od α.

$$\alpha < 1-(1-p)^n$$

$$\alpha - 1 < -(1-p)^n$$

$$1-\alpha > (1-p)^n$$

$$\ln(1-\alpha) > \ln\left((1-p)^n\right)$$

$$\ln(1-\alpha) > n \cdot \ln(1-p)$$

$$\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)} < n$$

Zatem najmniejsza liczba pomiarów n wynosi $n = \left\lceil \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)} \right\rceil + 1$, gdzie operator $\lceil\ \rceil$ oznacza część całkowitą z liczby.

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

Zadanie 99. (Źródło: [11])

W partii rur liczącej tysiąc sztuk jest dwieście sztuk rur stożkowych, sto pięćdziesiąt eliptycznych, pięćdziesiąt eliptycznych i stożkowych, a sześćset rur nie ma wad. Określmy następujące zdarzenia: S – losowo wybrana rura jest stożkowa, E – losowo wybrana rura jest eliptyczna. Czy zdarzenia S i E są niezależne?

Rozwiązanie:

Aby stwierdzić, czy zdarzenia są niezależne należy sprawdzić, czy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń równe jest iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń. Jeśli tak to znaczy, że zdarzenia są niezależne.

Całkowita liczba rur to N=1000. Rur, których wada polega na stożkowym kształcie jest s=200+50 (czyli również uwzględnione są rury, które są stożkowe i eliptyczne). Rur eliptycznych jest e=150+50.

$$P(S) = \frac{s}{N} = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{e}{N} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$$

Prawdopodobieństwo tego, że rura jest stożkowa i eliptyczna (czyli występują dwie wady jednocześnie) wynosi:

$$P(S \cap E) = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}.$$

Sprawdźmy, czy iloczyn $P(S) \cdot P(E)$ równy jest wartości $P(S \cap E)$:

$$P(S) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = P(S \cap E).$$

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń (czyli tego, że rura jest eliptyczna i stożkowa jednocześnie) jest równe iloczynowi prawdopodobieństw zdarzeń *S* i *E,* więc są one niezależne.

Zadanie 100. (Źródło: [11])

W ciągu tysiąca dni przeprowadzono obserwacje meteorologiczne dotyczące prędkości wiatru i ciśnienia atmosferycznego. Oznaczmy zdarzenia: A – prędkość wiatru mniejsza niż 5 m/s, A' – prędkość wiatru większa lub równa niż 5 m/s, B – ciśnienie atmosferyczne mniejsze od 1200 mbar, B' – ciśnienie atmosferyczne większe lub równe 1200 mbar. Zaobserwowano następujące liczby zdarzeń:

	A	A'	Razem
B	400	100	500
B'	200	300	500
Razem	600	400	1000

Zbadać, czy zdarzenia A i B są niezależne.

Rozwiązanie:

Aby stwierdzić, czy zdarzenia są niezależne należy sprawdzić, czy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń równe jest iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń. Jeśli tak to znaczy, że zdarzenia są niezależne. Korzystamy tu ze statystycznej interpretacji prawdopodobieństwa.

Żeby oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A należy zliczyć wszystkie wystąpienia zdarzenia A („Razem" w kolumnie z nagłówkiem A):

$$P(A)=\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}.$$

Żeby oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia B należy zliczyć wszystkie wystąpienia zdarzenia B („Razem" w wierszu B):

$$P(B)=\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}$$

Liczba zdarzeń, w których zaszło A i B jednocześnie znajdują się na przecięciu kolumny A i wiersza B:

$$P(A\cap B)=\frac{400}{1000}=\frac{2}{5}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}\neq P(A\cap B)=\frac{2}{5}$$

Zdarzenia nie są niezależne.

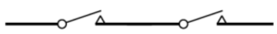
<u>Zadanie 101. (Źródło: [11])</u>

Prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez jeden przekaźnik wynosi p=0,9. Przekaźniki działają niezależnie, tzn. zadziałanie jednego z nich nie ma wpływu na zadziałanie drugiego. Obliczyć prawdopodobieństwo przekazania sygnału:

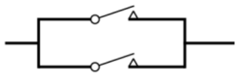
a. przy połączeniu szeregowym dwóch przekaźników (muszą zadziałać oba przekaźniki),

b. przy połączeniu równoległym (wystarczy aby jeden z przekaźników zadziałał).

a.



b.



<u>Rozwiązanie</u>:

Oznaczmy zdarzenia I – zadziała pierwszy przekaźnik, II – zadziała drugi przekaźnik.

a. przekazanie sygnału nastąpi jeśli pierwszy i drugi przekaźnik zadziała więc prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe:

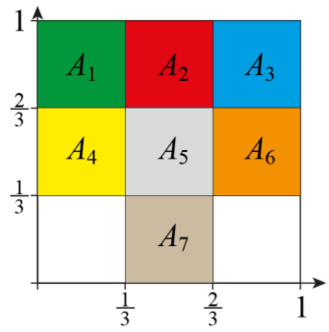
$$P(A)=P(\mathrm{I}\cap\mathrm{II})=P(\mathrm{I})\cdot P(\mathrm{II})=p\cdot p=0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}81,$$

b. przekazanie sygnału nastąpi, jeśli pierwszy lub drugi przekaźnik zadziała więc prawdopodobieństwo takiego zdarzenia równe jest:

$$P(B) = P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = \mathrm{P(I)} + \mathrm{P(II)} - \mathrm{P(I)} \cdot \mathrm{P(II)} = p + p - p \cdot p = 0{,}99.$$

Zadanie 102. (Źródło: [11])

Niech $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$; A_1, A_2, ..., A_7 będą zdarzeniami zaznaczonymi na rysunku. Oznaczmy: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = A_1 \cup A_4 \cup A_7$, $C = A_3 \cup A_6 \cup A_7$. Zbadać, czy zdarzenia A, B, C są niezależne oraz czy są parami niezależne.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że każde ze zdarzeń A_i stanowi $\frac{1}{9}$ zbioru Ω, czyli prawdopodobieństwo, że takie zdarzenie zajdzie wynosi $\frac{1}{9}$. Ponadto zdarzenia te są parami rozłączne. Aby stwierdzić, czy zdarzenia A, B i C są parami niezależne konieczne jest określenie i porównanie wartości $P(A) \cdot P(B)$ i $P(A \cap B)$, $P(A) \cdot P(C)$ i $P(A \cap C)$ oraz $P(B) \cdot P(C)$ i $P(B \cap C)$.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Wspólną częścią zbiorów A i B jest A_1 więc:

$$P(A \cap B) = P(A_1) = \frac{1}{9}.$$

Jak łatwo zauważyć:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = P(A \cap B)$$

więc zdarzenia A oraz B są niezależne. W przypadku par zdarzeń A i C (część wspólna A_3) oraz B i C (część wspólna A_7) przebieg obliczeń oraz wyniki są identyczne:

$$P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C) = \frac{1}{9}$$

$$P(B) \cdot P(C) = P(B \cap C) = \frac{1}{9}$$

Zatem zdarzenia A i B, A i C oraz B i C są niezależne.

Aby określić, czy zdarzenia *A*, *B* i *C* są niezależne należy obliczyć $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ i $P(A\cap B\cap C)$.

$$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

Zdarzenia nie mają wspólnej części więc iloczyn tych zdarzeń jest zbiorem pustym:

$$A\cap B\cap C=\emptyset.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zeru więc

$$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{27}\neq P(A\cap B\cap C)=P(\emptyset)=0,$$

czyli zdarzenia te nie są niezależne.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZUPEŁNE

Zadanie 103. (Źródło: [4])

Do urny zawierającej dwie kule (nieznanego koloru), wrzucono kulę białą, po czym z urny wyciągnięto losowo jedną kule. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta kula okaże się biała, jeśli wszystkie możliwe przypuszczenia o początkowym zestawie kolorów kul są jednakowo prawdopodobne.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *A* – wyciągnięto kulę białą. Możliwe są następujące hipotezy na temat początkowego zestawu kul: B_1 – zero kul białych, B_2 – jedna kula biała, B_3 – dwie kule białe. Z treści zadania wynika, że wszystkie trzy hipotezy są jednakowo prawdopodobne, w związku z czym prawdopodobieństwo prawdziwości każdej z hipotez jest równe:

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}.$$

Można zauważyć, że zdarzenia te tworzą układ zupełny zdarzeń.

Prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta została biała kula, jeśli wcześniej nie było w urnie ani jednej białej kuli (czyli po wrzuceniu białej kuli, była jedna biała i dwie innego koloru) wynosi

$$P(A\mid B_1)=\frac{1}{3}.$$

Prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta została biała kula, jeśli wcześniej w urnie była jedna biała kula (czyli po wrzuceniu białej kuli, były dwie białe i jedna innego koloru) wynosi

$$P(A|B_2)=\frac{2}{3}.$$

Prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta została biała kula, jeśli wcześniej w urnie były dwie białe kule (czyli po wrzuceniu białej kuli, wszystkie trzy były białe) wynosi

$$P(A|B_3)=\frac{3}{3}.$$

Na podstawie wzoru na prawdopodobieństwo zupełne otrzymujemy:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)$$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2}{3}.$$

Zadanie 104.

W laboratorium znajduje się dziesięć automatycznych mierników jakości wody. Trzy nowego typu (prawdopodobieństwo prawidłowego pomiaru wynosi p_1=0,95) i siedem starego typu (prawdopodobieństwo prawidłowego pomiaru wynosi p_2=0,92). Pomiar przeprowadzono jednym (losowo wybranym) urządzeniem. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pomiar będzie prawidłowy.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo, że wybrano urządzenie nowego typu równe jest $P(B_1)=\frac{3}{10}$, starego typu $P(B_2)=\frac{7}{10}$. Jak widać zdarzenia tworzą układ zupełny zdarzeń. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo zupełne otrzymujemy:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)$$

$$P(A)=\frac{3}{10}\cdot 0{,}95+\frac{7}{10}\cdot 0{,}92=0{,}929.$$

Zadanie 105. (Źródło: [4])

Skrzynia zawiera dwanaście detali wyprodukowanych w zakładzie *A*, dwadzieścia detali wyprodukowanych w zakładzie *B* i osiemnaście detali wyprodukowanych w zakładzie *C*.

Prawdopodobieństwo tego, że detal z zakładu *A* jest pierwszej jakości, jest równe 0,9. Dla detali z zakładów *B* i *C* te prawdopodobieństwa są odpowiednio równe 0,6 i 0,9. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięty losowo detal okaże się pierwszej jakości.

Rozwiązanie:

Określmy prawdopodobieństwa tego, że wybrany losowo detal pochodzi z zakładu *A*, *B* lub *C*. Wszystkich elementów jest n=12+20+18=50.

$$P(A)=\frac{12}{50};\quad P(B)=\frac{20}{50};\quad P(C)=\frac{18}{50}.$$

Jako zdarzenie *D* oznaczmy, że losowo wyciągnięty detal będzie pierwszej jakości, wówczas:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D\,|\,A)+P(B)\cdot P(D\,|\,B)+P(C)\cdot P(D\,|\,C)$$

$$P(D)=\frac{12}{50}\cdot 0{,}9+\frac{20}{50}\cdot 0{,}6+\frac{18}{50}\cdot 0{,}9=0{,}78.$$

Zadanie 106. (Źródło: [4])

Pierwsza urna zawiera dziesięć kul, w tym osiem białych. Druga zawiera dwadzieścia kul, w tym cztery białe. Z każdej urny wyciągnięto po jednej kuli, następnie z tych dwóch kul losowo wybrano jedną kulę. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wybrano kulę białą.

Rozwiązanie:

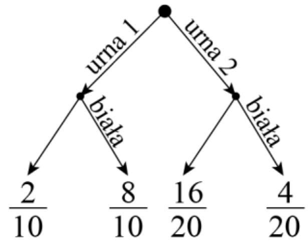
Oznaczmy *A* – wybrano kulę białą, *B* – kula pochodzi z urny pierwszej, *C* – kula pochodzi z urny drugiej. *A*|*B* – kula biała wylosowana z urny pierwszej, *A*|*C* – kula biała wylosowana z urny drugiej.

$$P(B)=\frac{1}{2};\quad P(C)=\frac{1}{2};\quad P(A\,|\,B)=\frac{8}{10};\quad P(A\,|\,C)=\frac{4}{20}.$$

$$P(A)=P(B)\cdot P(A\,|\,B)+P(C)\cdot P(A\,|\,C)$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{20}=\frac{1}{2}.$$

Zadanie to można rozwiązać nie korzystając z własności prawdopodobieństwa zupełnego. Losując po jednej kuli z każdej z urn prawdopodobieństwa otrzymania bili białej są równe $\frac{8}{10}$ i $\frac{4}{20}$.



Możliwe wyniki losowania dwóch kul są następujące:

$\{(k,k),\ (b,k),\ (k,b),\ (b,b)\}$, gdzie b oznacza kulę białą, a k oznacza kulę innego koloru. Przyporządkujmy interesującym nas zdarzeniom prawdopodobieństwa:

$$P((b,k)) = \frac{8}{10}\cdot\frac{16}{20} = \frac{16}{25}; \quad P((k,b)) = \frac{2}{10}\cdot\frac{4}{20} = \frac{1}{25}; \quad P((b,b)) = \frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20} = \frac{4}{25}.$$

Następnie dla każdego z powyższych zdarzeń określmy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w drugim losowaniu: dla (b,k), (k,b) prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{1}{2}$, dla (b,b) – 1. Mamy tu do czynienia z iloczynem zdarzeń (np. w pierwszym losowaniu (z urny) wylosowano kulę białą i w drugim losowaniu (z uprzednio wybranych dwóch bil) również wylosowano kulę białą) więc należy pomnożyć prawdopodobieństwa otrzymania kuli białej w każdym zdarzeniu. Ostatecznie prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wyniesie:

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot P((b,k)) + \frac{1}{2}\cdot P((k,b)) + 1\cdot P(b,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25} + 1\cdot\frac{4}{25} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 107. (Źródło: [4])

Prawdopodobieństwa tego, że w czasie pracy komputera nastąpi awaria: koprocesora arytmetycznego, pamięci RAM, innych urządzeń mają się do siebie jak 3:2:5. Prawdopodobieństwo wykrycia awarii: w koprocesorze arytmetycznym, w pamięci i pozostałych urządzeniach, są odpowiednio równe: 0,8, 0,9 i 0,9. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że awaria w komputerze zostanie wykryta.

Rozwiązanie:

Określmy prawdopodobieństwa awarii poszczególnych podzespołów. A – koprocesora arytmetycznego, B – pamięci RAM, C – innych elementów.

$$P(A) = \frac{3}{3+2+5} = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{3+2+5} = \frac{1}{5}; \quad P(C) = \frac{5}{3+2+5} = \frac{1}{2}.$$

Jako zdarzenie D określmy wykrycie awarii odpowiedniego elementu. Prawdopodobieństwo **wykrycia awarii** (odpowiedniego komponentu): koprocesora arytmetycznego $P(D\,|\,A) = 0{,}8$, pamięci $P(D\,|\,B) = 0{,}9$, innego komponentu $P(D\,|\,C) = 0{,}9$.

$$P(D) = P(A)\cdot P(D\,|\,A) + P(B)\cdot P(D\,|\,B) + P(C)\cdot P(D\,|\,C)$$

$$P(D) = \frac{3}{10}\cdot 0{,}8 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}9 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}9 = 0{,}87.$$

Zadanie 108. (Źródło: [11])

W magazynie fabryki są amperomierze pochodzące z trzech taśm produkcyjnych, przy czym liczby amperomierzy z każdej taśmy są takie same. Wiadomo, że dostawy z pierwszej taśmy zawierają 0,5% braków, z drugiej zawierają 0,7% braków, z trzeciej zawierają 1% braków. Wybrany w sposób losowy amperomierz okazał się brakiem. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że został on wyprodukowany na taśmie drugiej. Założyć, że liczby amperomierzy pochodzące z danej taśmy są identyczne.

Rozwiązanie:

Oznaczmy A_1 – amperomierz pochodzi z taśmy pierwszej, A_2 – amperomierz pochodzi z taśmy drugiej, A_3 – amperomierz pochodzi z taśmy trzeciej, B – amperomierz jest brakiem. Korzystając z założenia, że liczby amperomierzy wyprodukowane na każdej taśmie są identyczne otrzymamy:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Określmy następnie prawdopodobieństwa otrzymania wadliwego amperomierza, jeśli wiemy, że został wyprodukowany na danej taśmie:

$$P(B \mid A_1) = \frac{0,5}{100} = 0,005; \qquad P(B \mid A_2) = \frac{0,7}{100} = 0,007; \qquad P(B \mid A_3) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym obliczamy $P(B)$:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0,005 + \frac{1}{3} \cdot 0,007 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 = 0,00733333.$$

W celu oszacowania prawdopodobieństwa tego, że wadliwy amperomierz został wyprodukowany na taśmie drugiej, pozostaje tylko podstawić do wzoru Bayesa:

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)}{P(B)}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,007}{0,00733333} = 0,318182$$

Zadanie 109. (Źródło: [11])

Pewien zakład produkuje śruby w trzech technologiach: B_1, B_2, B_3, których produkcja wynosi odpowiednio 25%, 35% i 40% całej produkcji. Maszyny wytwarzają odpowiednio 5%, 4% i 2% śrub wadliwych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybraną śrubę wyprodukowano w technologii B_1, jeśli stwierdzono, że jest ona wadliwa.

Rozwiązanie:

Określmy prawdopodobieństwa tego, że śruba została wyprodukowana w danej technologii:

$$P(B_1) = 0{,}25; \quad P(B_2) = 0{,}35; \quad P(B_3) = 0{,}4.$$

Jako A oznaczmy zdarzenie polegające na tym, że śruba jest wadliwa, wówczas prawdopodobieństwa, że śruba jest wadliwa jeśli została wyprodukowana w danej technologii będą równe:

$$P(A \mid B_1) = 0{,}05; \quad P(A \mid B_2) = 0{,}04; \quad P(A \mid B_3) = 0{,}02.$$

Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym mamy:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)$$

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$$

Korzystając ze wzoru Bayesa otrzymuje się:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}0345} = 0{,}362319.$$

Zadanie 110. (Źródło: [11])

W magazynie znajdują się elementy wyprodukowane w firmach I i II. Z firmy I pochodzi 40% elementów, z firmy II – 60%. Niezawodność (w czasie T) elementów z firmy I jest równa 0,95, z firmy II – 0,7. W sposób przypadkowy wzięto z magazynu element. Obliczyć:

a. prawdopodobieństwo tego, że pochodzi z firmy I,

b. prawdopodobieństwo tego, że element będzie pracował poprawnie przez czas T,

c. prawdopodobieństwo warunkowe tego, że element pochodzi z firmy I, jeśli stwierdzono, że pracował poprawnie przez czas T,

d. prawdopodobieństwo warunkowe tego, że element pochodzi z firmy II, jeśli stwierdzono, że pracował poprawnie przez czas T.

Rozwiązanie:

a. $P(\mathrm{I}) = 0{,}4$.

b. Prawdopodobieństwa tego, że element został wyprodukowany przez firmę I wynosi $P(\mathrm{I}) = 0{,}4$, a $P(\mathrm{II}) = 0{,}6$. Oznaczmy *A* – element będzie pracował poprawnie przez czas *T*. Prawdopodobieństwa tego, że element będzie pracował przez czas *T*, jeśli został wyprodukowany przez firmę I jest równe $P(A\,|\,\mathrm{I}) = 0{,}95$, jeśli został wyprodukowany przez firmę II $P(A\,|\,\mathrm{II}) = 0{,}7$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że będzie pracował przez czas *T* będzie równe:

$$P(A) = P(\mathrm{I}) \cdot P(A\,|\,\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) \cdot P(A\,|\,\mathrm{II})$$

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}8.$$

c. Prawdopodobieństwo należy obliczyć wykorzystując formułę Bayesa:

$$P(\mathrm{I}\,|\,A) = \frac{P(\mathrm{I}) \cdot P(A\,|\,\mathrm{I})}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}8} = 0{,}47$$

d. $$P(\mathrm{II}\,|\,A) = \frac{P(\mathrm{II}) \cdot P(A\,|\,\mathrm{II})}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}7}{0{,}8} = 0{,}525.$$

LITERATURA

[1] Buslenko N.P. Golenko D.I., Sobol I.M., Sragowicz W.G., Szrejder J.A. (1976), *Metoda Monte Carlo*, Warszawa

[2] Deutsch R. (1969), *Teoria Estymacji*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

[3] Devore J. L. (2012), *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. International edition*. *8th edition*. BROOKS/COLE.

[4] Gmurman W.J. (1976), *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

[5] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. (2009), *The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction. Second Edition*. Springer

[6] Greń J. (1970), *Statystyka matematyczna. modele i zadania. Wydanie czwarte uzupełnione*. Warszawa.

[7] Ligman J., Stachowski E., Zalewska A. (1996), *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich.* Oficyna wydawniczo-poligraficzna i reklamowo-handlowa „ADAM” Warszawa.

[8] Ligman J. (1976), *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich*. Wydawnictwa szkolne i pedagogiczne. Warszawa.

[9] Medina M.A. (2011), *Introduction To Probability and Statistics in Hydrology*. Duke University, Dyrham

[10] Pawłowski Z. (1976), *Statystyka matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo naukowe. Warszawa.

[11] Plucińska A., Pluciński E. (2000), *Probabilistyka*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

[12] Plucińska A., Pluciński E.(1975) *Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla studentów politechnik*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

[13] Kaczmarek Z. (1970), *Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii*. Wydawnictwa komunikacji i łączności. Warszawa.

[14] Koronacki J., Mielniczuk J. (2006), *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

[15] Korzyński M. (2006), *Metodyka eksperymentu. Planowanie, realizacja i statystyczne opracowanie wyników eksperymentów technologicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

[16] Szlenk W. (1970), *Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV liceum ogólnokształcącego i technikum*. Wydawnictwa szkolne i pedagogiczne. Warszawa.

[17] Taylor J.R. (2011), *Wstęp do analizy błędu pomiarowego. Wydanie II zmienione*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.

[18] Walesiak M., Gatnar E. (2009), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

[19] Walpole R.E, Myers R.H., Myers S.L, Ye K., (2007), *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. Pearson Education International

[20] Węglarczyk W. (2010), *Statystyka w inżynierii środowiska*. Politechnika Krakowska, Kraków.

[21] Yevjevich V. (1972), *Probability and statistics in hydrology*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A

[22] Zaleski J. (2004) *Modele stochastyczne i symulacja komputerowa. Zastosowanie do systemów zaopatrzenia w wodę*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

[23] Zieliński R. (1970), *Metody Monte Carlo*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa

[24] Zieliński R. (1974), *Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa.